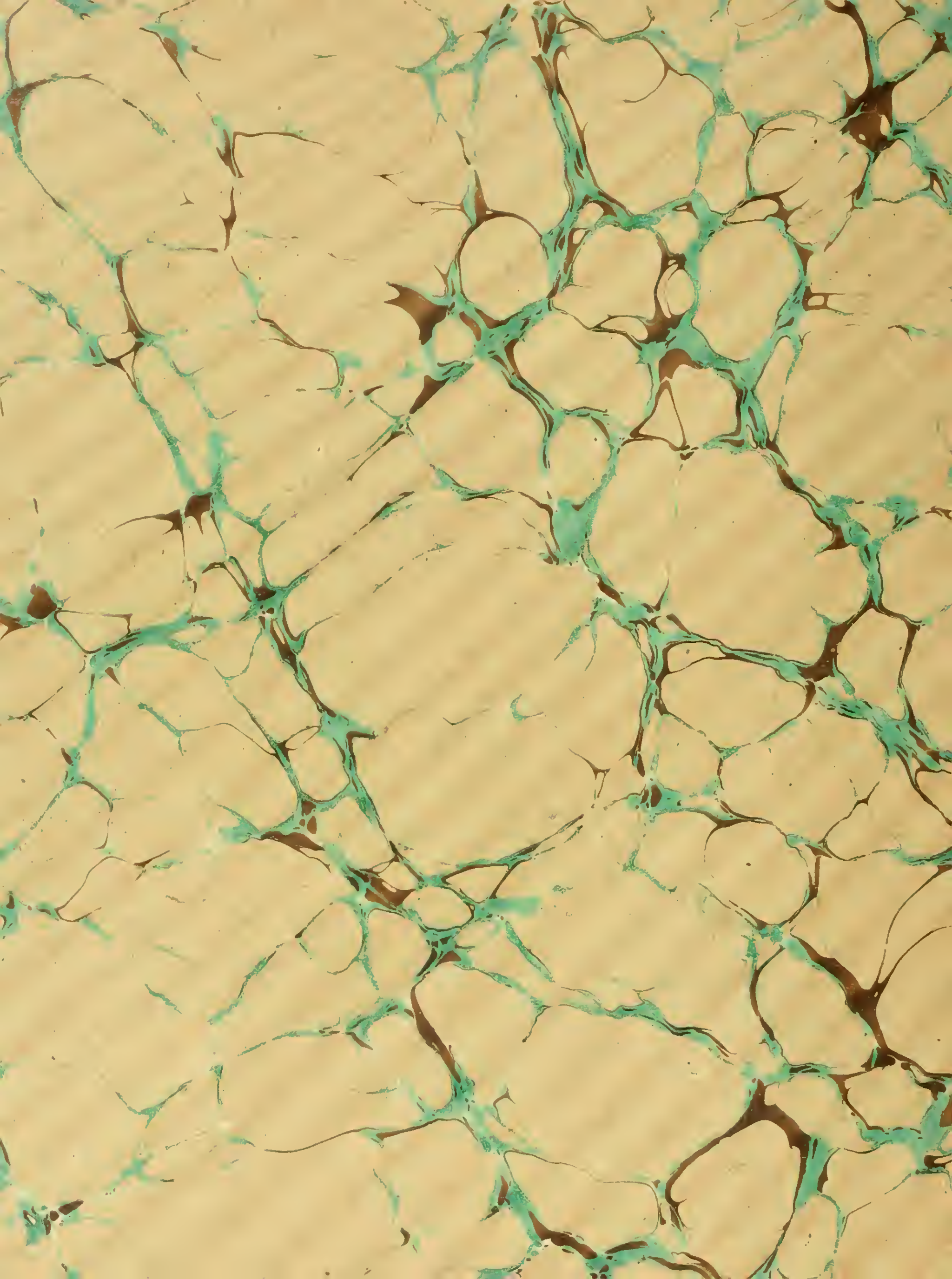
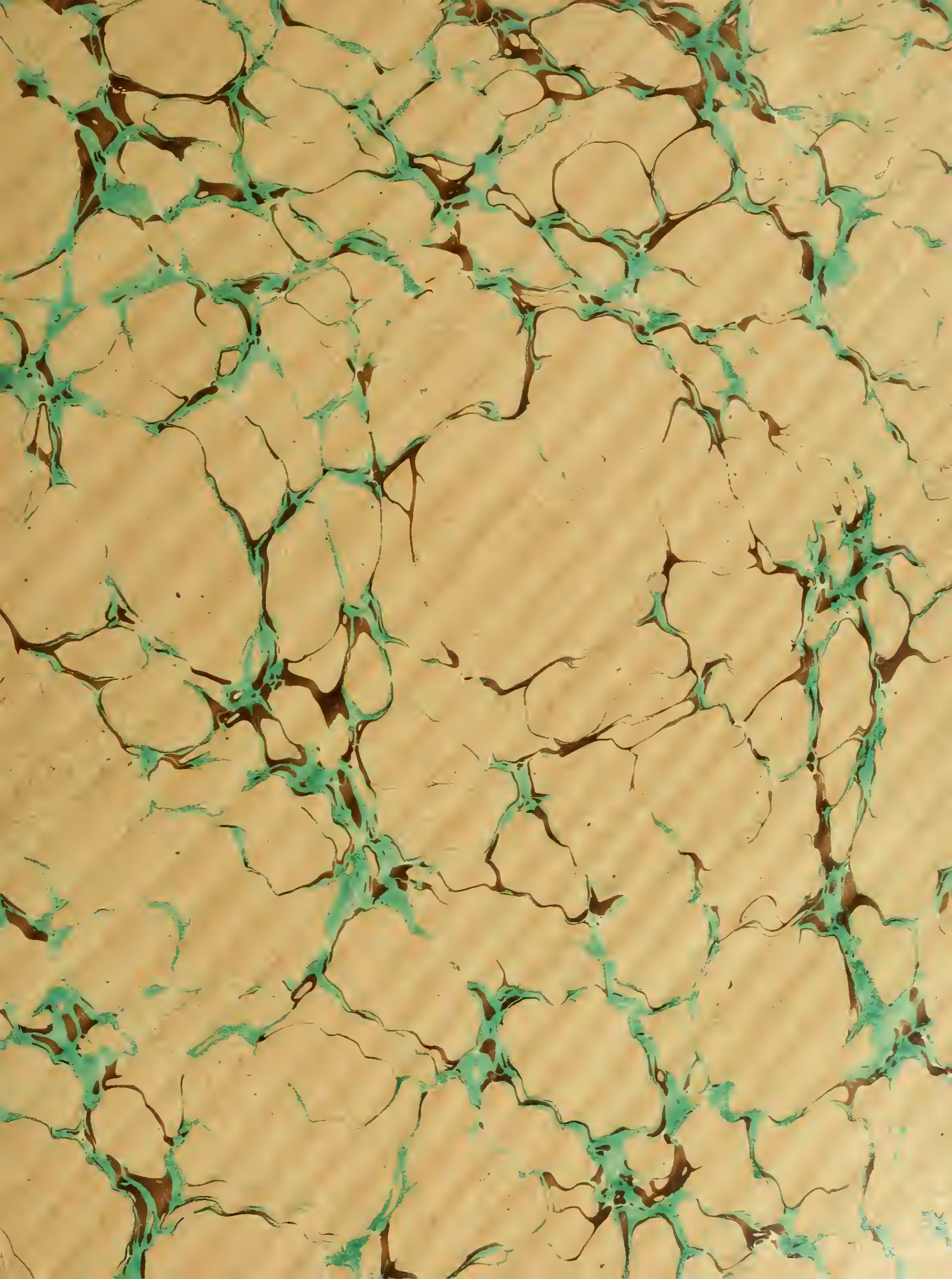






JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

PARIS. — IMPRIMERIE DE MALLET-BACHELIER,
rue de Seine-Saint-Germain, 10, près l'Institut

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES,

OU

RECUEIL MENSUEL

DE MÉMOIRES SUR LES DIVERSES PARTIES DES MATHÉMATIQUES;

Publié

PAR JOSEPH LIOUVILLE,

MEMBRE DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES ET DU BUREAU DES LONGITUDES,
PROFESSEUR AU COLLÉGE DE FRANCE.

DEUXIÈME SÉRIE. — TOME VII. — ANNÉE 1862.

PARIS,

MALLET-BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE ET DU BUREAU DES LONGITUDES,
Quai des Augustins, n° 55.

1862

TABLE DES MATIÈRES.

DEUXIÈME SÉRIE. — TOME VII.

Pages.

Sur la forme $X^2 + 2Y^2 + 2Z^2 + 4T^2$; par M. *J. Liouville*. 1

Sur la forme $X^2 + 8(Y^2 + Z^2 + T^2)$; par M. *J. Liouville*. 5

Sur la forme $X^2 + 4Y^2 + 4Z^2 + 8T^2$; par M. *J. Liouville*. 9

Sur la forme $X^2 + 8Y^2 + 8Z^2 + 16T^2$; par M. *J. Liouville*. 13

Nouveau théorème concernant les nombres premiers de la forme $16g + 11$; par M. *J. Liouville*. 17

Nouveau théorème concernant les nombres premiers de la forme $8\mu + 1$; par M. *J. Liouville*. 19

Théorème concernant le produit de deux nombres premiers inégaux de la forme $8\mu + 3$; par M. *J. Liouville* 21

Théorème concernant la quatrième puissance d'un nombre premier de la forme $8\mu + 3$; par M. *J. Liouville*. 23

Sur la théorie des fonctions elliptiques et ses applications à l'arithmétique; par M. *Hermite*. (Lettre adressée à M. Liouville.). 25

Réponse de M. *Liouville*. 41

Note de M. *Liouville*. 44

De l'intégrabilité des fonctions différentielles d'un ordre supérieur au premier; par MM. *Stoffel* et *Bach*. 49

Sur la forme $x^2 + 2y^2 + 4z^2 + 4t^2$; par M. *J. Liouville*. 62

Sur la forme $x^2 + 2y^2 + 8z^2 + 8t^2$; par M. *J. Liouville*. 65

Sur la forme $x^2 + 8y^2 + 16z^2 + 16t^2$; par M. *J. Liouville*. 69

Sur la forme $x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 16t^2$; par M. *J. Liouville*. 73

Sur la forme $x^2 + 16(y^2 + z^2 + t^2)$; par M. *J. Liouville*. 77

Nouvelle théorie des fonctions de variables imaginaires; par M. *Maximilien Marie*. (Suite.). 81

Sur la forme $x^2 + y^2 + 2z^2 + 4t^2$; par M. *J. Liouville*. 99

Sur la forme $x^2 + y^2 + 4z^2 + 8t^2$; par M. *J. Liouville*. 103

Sur la forme $x^2 + 4y^2 + 16z^2 + 16t^2$; par M. *J. Liouville*. 105

Pages
Sur la forme $x^2 + y^2 + 8z^2 + 8t^2$; par M. *J. Liouville*. 109
Sur la forme $x^2 + 4y^2 + 8z^2 + 8t^2$; par M. *J. Liouville*. 113
Sur la forme $x^2 + y^2 + 16z^2 + 16t^2$; par M. *J. Liouville*. 117
Sur les arcs des courbes planes ou sphériques considérées comme enveloppes de cercles; par M. *Mannheim*. 121
Théorème concernant le double du carré d'un nombre premier $8\mu + 3$; par M. *J. Liouville*. 136
Note sur les fonctions al (x), etc., de M. Weierstrass; par M. *A. Cayley*. 137
Sur la forme $x^2 + 4y^2 + 8z^2 + 16t^2$; par M. *J. Liouville*. 143
Sur la forme $x^2 + 2y^2 + 16z^2 + 16t^2$; par M. *J. Liouville*. 145
Sur la forme $x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 8t^2$; par M. *J. Liouville*. 148
Sur la forme $x^2 + 2y^2 + 4z^2 + 16t^2$; par M. *J. Liouville*. 150
Sur la forme $x^2 + 2y^2 + 8z^2 + 16t^2$; par M. *J. Liouville*. 153
Sur la forme $x^2 + y^2 + 2z^2 + 8t^2$; par M. *J. Liouville*. 155
Sur la forme $x^2 + y^2 + 4z^2 + 16t^2$; par M. *J. Liouville*. 157
Sur la forme $x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 16t^2$; par M. *J. Liouville*. 161
Sur la forme $x^2 + y^2 + z^2 + 16t^2$; par M. *J. Liouville*. 165
Expériences sur une machine hydraulique à tube oscillant et sur des effets de succion à contre-courant, etc.; par M. *Anatole de Caligny*. 169
Sur la forme $x^2 + y^2 + 8z^2 + 16t^2$; par M. *J. Liouville*. 201
Sur la forme $x^2 + y^2 + 2z^2 + 16t^2$; par M. *J. Liouville*. 205
Sur l'application du théorème de l'équivalence des transformations au travail intérieur; par M. *R. Clausius*. (Traduit de l'allemand par M. *Marc Dufraisse*). 209
Sur la forme $x^2 + 8y^2 + 8z^2 + 64t^2$; par M. *J. Liouville*. 246
Sur la forme $x^2 + 8y^2 + 16z^2 + 64t^2$; par M. *J. Liouville*. 249
Démonstration d'un théorème d'Abel; Note de M. *Lejeune-Dirichlet*. 253
Extrait d'une Lettre de M. *Besge* à M. *Liouville*. 256
Mémoire sur l'intégration des équations différentielles; par *C.-J. Malmsten*. (Traduit librement du suédois, par l'auteur). 257
Extrait d'une Lettre de M. *Liouville* à M. *Besge*. 375
De quelques analogies de la géométrie du plan à celle de l'espace; par M. *Paul Serret*. 377
Théorème concernant les nombres triangulaires; par M. *J. Liouville* 407
Étude sur les singularités des surfaces algébriques; par M. *E. de Jonquières*. . . 409
Propriétés relatives à des nombres premiers; par M. *Ad. Guibert*. 414
Extrait d'une Lettre de M. *Le Besgue* à M. *Liouville*. 417
Sur la forme $x^2 + 8y^2 + 64(z^2 + t^2)$; par M. *J. Liouville*. 421
Nouvelle théorie des fonctions de variables imaginaires; par M. *Maximilien Marie*. (Fin.) 425

ERRATA.

Page 33, ligne 17, *au lieu de* proprement primitives de déterminant $-$ N, *lisez* quadratiques de déterminant $-$ N dont un au moins des coefficients extrêmes est impair.

Page 228, ligne 6, *au lieu de* $\frac{dT}{dv}$, *lisez* $\frac{dF}{dv}$.

Page 228, ligne 8, *au lieu de* T, *lisez* F.

Page 253, ligne 6, *avant* est convergente, *mettez* où a_0, a_1, a_2, ... sont des quantités positives ou négatives.

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

SUR LA FORME

$X^2 + 2Y^2 + 2Z^2 + 4T^2$;

Par M. J. LIOUVILLE.

1. Étant donné un entier n, on demande une règle simple pour calculer le nombre N des représentations de n par la forme

$$X^2 + 2Y^2 + 2Z^2 + 4T^2,$$

c'est-à-dire le nombre N des solutions de l'équation indéterminée

$$n = X^2 + 2Y^2 + 2Z^2 + 4T^2,$$

où X, Y, Z, T sont des entiers quelconques positifs, nuls ou négatifs. Nous ferons comme à l'ordinaire $n = 2^\alpha m$, m étant impair et l'exposant α pouvant se réduire à zéro. On comprend facilement que les divers cas à examiner se ramèneront tous à la considération de la forme

$$x^2 + y^2 + 2(z^2 + t^2).$$

Nous supposons donc connus du lecteur les résultats que nous avons obtenus dans le cahier de juillet 1860 pour cette dernière forme, ré-

sultats qui du reste découlent eux-mêmes, ainsi qu'on l'a vu, des théoremes de Jacobi concernant les représentations par une somme de quatre carrés.

Soit d'abord n impair, $n = m$, en sorte qu'il s'agisse du nombre N des solutions de l'équation

$$m = X^2 + 2Y^2 + 2Z^2 + 4T^2$$

dans laquelle X ne pourra évidemment être qu'impair. En l'écrivant ainsi

$$m = X^2 + (2T)^2 + 2(Y^2 + Z^2),$$

on verra qu'elle ne diffère de l'équation

$$m = x^2 + y^2 + 2(z^2 + t^2)$$

où l'un des entiers x, y sera pair, l'autre impair, qu'en ce que le carré impair X^2 est toujours le premier, et le carré pair $(2T)^2$ toujours le second, ce qui réduit à moitié le nombre des solutions. Mais ce nombre, pour

$$m = x^2 + y^2 + 2(z^2 + t^2),$$

a été trouvé égal à $4\zeta_1(m)$, $\zeta_1(m)$ désignant la somme des diviseurs de m. Le nombre N des solutions de l'équation

$$m = X^2 + 2Y^2 + 2Z^2 + 4T^2$$

est donc fourni par la formule

$$N = 2\zeta_1(m).$$

Soit à présent n pair, $n = 2^\alpha m$, $\alpha > 0$. Il est clair que dans l'équation

$$2^\alpha m = X^2 + 2Y^2 + 2Z^2 + 4T^2$$

X devra être pair. Soit donc

$$X = 2U.$$

Il s'ensuivra

$$2^{\alpha-1}m = 2U^2 + Y^2 + Z^2 + 2T^2,$$

equation qui revient à

$$2^{\alpha-1}m = x^2 + y^2 + 2(z^2 + t^2)$$

et qui à son tour reproduirait par des opérations inverses celle dont elle a été déduite.

Ayant donc trouvé pour tous les cas qui peuvent se présenter le nombre des solutions de l'équation

$$2^{\alpha-1}m = x^2 + y^2 + 2(z^2 + t^2),$$

nous en conclurons, pour n pair $= 2^\alpha m$, le nombre N des solutions de notre équation

$$n = X^2 + 2Y^2 + 2Z^2 + 4T^2.$$

Pour n impairement pair, $n = 2m$, nous aurons ainsi

$$N = 4\zeta_1(m).$$

Pour N divisible par 4, non par 8, $n = 4m$, il nous viendra

$$N = 8\zeta_1(m).$$

Enfin pour n divisible par 8, avec quotient pair ou impair, $n = 2^\alpha m$, $\alpha > 2$, on doit prendre

$$N = 24\zeta_1(m).$$

2. Supposons à présent qu'on veuille chercher à part le nombre M des solutions *propres* de l'équation

$$n = X^2 + 2Y^2 + 2Z^2 + 4T^2,$$

c'est-à-dire le nombre M des solutions qui subsistent en exigeant que les valeurs simultanées de X, Y, Z, T ne soient jamais divisibles par un

même entier > 1. En continuant à faire $n = 2^\alpha m$, il faudra, comme dans le cahier de juillet 1860, substituer à la fonction numérique $\zeta_1(m)$ la fonction $Z_1(m)$ ainsi définie : l'expression de m en facteurs premiers étant $a^\alpha b^\beta \ldots c^\omega$, on prend

$$Z_1(m) = (a^\alpha + a^{\alpha-1})(b^\beta + b^{\beta-1})\ldots(c^\omega + c^{\omega-1}).$$

Ajoutons que pour $m = 1$, nous faisons $Z_1(m) = 1$.

Cela posé, pour n impair, $n = m$, on a

$$M = 2Z_1(m).$$

Pour n impairement pair, $n = 2m$,

$$M = 4Z_1(m).$$

Pour $n = 4m$,

$$M = 6Z_1(m).$$

Pour $n = 8m$,

$$M = 20Z_1(m).$$

Pour $n = 16m$,

$$M = 16Z_1(m).$$

Enfin pour n divisible par 32, c'est-à-dire pour $n = 2^\alpha m$, avec $\alpha > 4$, on a généralement

$$M = 0;$$

cela tient à ce que les entiers X, Y, Z, T, ne peuvent plus alors être que pairs, c'est-à-dire tous divisibles par 2.

SUR LA FORME
$X^2 + 8(Y^2 + Z^2 + T^2)$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

1. Étant donné un entier n pair ou impair (que je représenterai par $2^\alpha m$, m étant impair et l'exposant α pouvant se réduire à zéro), on demande le nombre N des représentations de n par la forme

$$X^2 + 8(Y^2 + Z^2 + T^2),$$

c'est-à-dire le nombre N des solutions de l'équation indéterminée

$$n = X^2 + 8(Y^2 + Z^2 + T^2),$$

où X, Y, Z, T sont des entiers indifféremment positifs, nuls ou négatifs.

Cette question sera aisée à résoudre si l'on se rappelle ce que nous avons dit (dans le cahier de juillet 1861) au sujet des deux formes

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2t^2, \quad x^2 + 2(y^2 + z^2 + t^2);$$

et la fonction numérique de m dont tout dépendra sera encore celle que nous désignons à l'endroit cité par la simple lettre S, et aussi par $\omega_1(m)$. Ayant décomposé l'entier impair m en deux facteurs d, δ de toutes les manières possibles, on a

$$\omega_1(m) = \sum (-1)^{\frac{\delta^2-1}{8}} d.$$

2. Prenons d'abord n impair, $n = m$. Il est évident que les entiers impairs représentés par $X^2 + 8(Y^2 + Z^2 + T^2)$ sont tous $\equiv 1$ (mod. 8), en sorte que $N = 0$ quand m est de la forme $8k - 1$ ou de la forme $8k \pm 3$. Soit donc $m = 8k + 1$. J'observe qu'avec cette dernière valeur de m, l'équation

$$m = X^2 + 8(Y^2 + Z^2 + T^2)$$

ne diffère pas de celle-ci

$$m = X^2 + 2(y^2 + z^2 + t^2),$$

attendu que $m - X^2$ étant un multiple de 8, les entiers y, z, t ne peuvent être que pairs. Or le nombre des solutions de l'équation

$$m = 8k + 1 = X^2 + 2(y^2 + z^2 + t^2)$$

est $2\omega_1(m)$. Pour le nombre N des solutions de notre équation

$$m = 8k + 1 = X^2 + 8(Y^2 + Z^2 + T^2),$$

on a donc aussi

$$N = 2\omega_1(m).$$

5. Prenant ensuite n pair, nous voyons qu'aucun nombre impairement pair ne peut être représenté par la forme

$$X^2 + 8(Y^2 + Z^2 + T^2).$$

Ainsi pour $n = 2m$, on a $N = 0$. Mais pour n divisible par 4, non par 8, on a

$$N = 2\omega_1(m)$$

quand $m = 8k \pm 1$, et

$$N = 6\omega_1(m)$$

quand $m = 8k \pm 3$. En effet, l'équation

$$4m = X^2 + 8(Y^2 + Z^2 + T^2)$$

exige que l'on ait en nombres entiers $X = 2x$, et par conséquent se ramène à l'équation déjà traitée par nous

$$m = x^2 + 2(Y^2 + Z^2 + T^2).$$

En général l'équation

$$2^\alpha m = X^2 + 8(Y^2 + Z^2 + T^2),$$

à partir de $\alpha = 2$, se ramène à celle-ci :

$$2^{\alpha-2} m = x^2 + 2(Y^2 + Z^2 + T^2).$$

Donc, pour $\alpha > 2$, le nombre N des solutions de l'équation

$$2^\alpha m = X^2 + 8(Y^2 + Z^2 + T^2)$$

est exprimé par la formule

$$N = 2\left[2^{\alpha-1} - (-1)^{\frac{m^2-1}{8}}\right]\omega_1(m),$$

en sorte que l'on a

$$N = 2(2^{\alpha-1} - 1)\,\omega_1(m)$$

quand $m = 8k \pm 1$, mais

$$N = 2(2^{\alpha-1} + 1)\,\omega_1(m)$$

quand $m = 8k \pm 3$.

4. On peut aussi désirer de connaître le nombre M des solutions propres de l'équation

$$n \quad \text{ou} \quad 2^\alpha m = X^2 + 8(Y^2 + Z^2 + T^2).$$

Il faudra alors substituer à la fonction $\omega_1(m)$ une autre fonction numérique

$$O_1(m)$$

que je dois d'abord définir.

Soit p un quelconque des facteurs premiers dont m se compose et μ son exposant dans l'entier impair m, en sorte que l'on puisse écrire, d'après une notation connue,

$$m = \prod (p^\mu).$$

Je définis $O_1(m)$ par l'équation

$$O_1(m) = \prod\left[p^\mu + (-1)^{\frac{p^2-1}{8}} p^{\mu-1}\right],$$

que l'on peut écrire aussi, au moyen du signe $\left(\frac{a}{b}\right)$ de Legendre et de Jacobi,

$$O_1(m) = \prod\left[p^\mu + \left(\frac{2}{p}\right) p^{\mu-1}\right].$$

Ajoutons que pour $m = 1$, nous prenons $O_1(m) = 1$.

Cela posé, pour n impair, $n = m$, on a

$$M = 0$$

quand m est de la forme $8k - 1$ ou de la forme $8k \pm 3$, mais

$$M = 2O_1(m)$$

quand $m = 8k + 1$.

Pour n impairement pair, $n = 2m$, on a toujours

$$M = 0.$$

Pour n divisible par 4, non par 8, $n = 4m$, on a

$$M = 0$$

quand $m = 8k + 1$, mais

$$M = 2O_1(m)$$

quand $m = 8k - 1$, et

$$M = 6O_1(m)$$

quand $m = 8k \pm 3$.

Pour n divisible par 8, non par 16, $n = 8m$, on a

$$M = 6O_1(m)$$

quand $m = 8k \pm 1$, mais

$$N = 10O_1(m)$$

quand $m = 8k \pm 3$.

Enfin pour n divisible par 16, c'est-à-dire pour $n = 2^\alpha m$, avec $\alpha > 3$, on a, quelle que soit la forme linéaire de m, la formule unique que voici :

$$M = 3.2^{\alpha-2}O_1(m).$$

Nous croyons pouvoir nous dispenser d'ajouter des exemples.

SUR LA FORME

$X^2 + 4Y^2 + 4Z^2 + 8T^2$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

---

1. Étant donné un entier n, pair ou impair, on demande le nombre N des représentations de n par la forme

$$X^2 + 4Y^2 + 4Z^2 + 8T^2,$$

c'est-à-dire le nombre N des solutions de l'équation indéterminée

$$n = X^2 + 4Y^2 + 4Z^2 + 8T^2,$$

où X, Y, Z, T sont des entiers positifs, nuls ou négatifs.

Nous poserons

$$n = 2^\alpha m,$$

m étant impair et l'exposant α pouvant se réduire à zéro. On va voir que pour la forme actuelle

$$X^2 + 4Y^2 + 4Z^2 + 8T^2,$$

comme pour la forme

$$X^2 + 8(Y^2 + Z^2 + T^2)$$

considérée dans l'article précédent, tout dépend de la fonction $\omega_1(m)$ définie (au moyen des diviseurs conjugués d, δ de m) par l'équation

$$\omega_1(m) = \sum (-1)^{\frac{\delta^2-1}{8}} d.$$

Mais, pour comprendre nos démonstrations, il ne suffira pas de se

rappeler ce que nous avons dit (dans le cahier de juillet 1861) au sujet des deux formes

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2t^2, \quad x^2 + 2(y^2 + z^2 + t^2):$$

on devra y joindre ce que nous avons ajouté (dans le cahier de septembre 1861) concernant la forme

$$x^2 + y^2 + z^2 + 8t^2.$$

2. Soit d'abord n impair, $n = m$. L'équation

$$4g + 3 = X^2 + 4Y^2 + 4Z^2 + 8T^2$$

est évidemment impossible en nombres entiers. Pour $m = 4g + 3$, on a donc $N = 0$. Mais si l'on prend

$$m = 4g + 1,$$

on aura

$$N = 2\omega_1(m):$$

car l'équation

$$m = 4g + 1 = X^2 + 4Y^2 + 4Z^2 + 8T^2$$

ne diffère de l'équation

$$m = 4g + 1 = x^2 + y^2 + z^2 + 8t^2,$$

qui a $6\omega_1(m)$ solutions, et où deux des trois carrés x^2, y^2, z^2 ne peuvent manquer d'être pairs, qu'en ce que la place du carré impair s'y trouve assignée d'avance, ce qui réduit au tiers le nombre des solutions.

Pour n impairement pair, $n = 2m$, on a de nouveau

$$N = 0.$$

Mais pour n pairement pair, $n = 2^\alpha m$, $\alpha > 1$, le nombre N des solutions de notre équation

$$2^\alpha m = X^2 + 4Y^2 + 4Z^2 + 8T^2$$

est évidemment le même que pour l'équation (traitée dans le cahier de juillet 1861)

$$2^{\alpha-3}m = x^2 + y^2 + z^2 + 2t^2.$$

Dans ce cas de $\alpha > 1$, on a donc

$$N = 2(2^{\alpha} - 1)\,\omega_1(m)$$

si $m = 8k \pm 1$, mais

$$N = 2(2^{\alpha} + 1)\,\omega_1(m)$$

si $m = 8k \pm 3$.

Ces deux valeurs de N sont comprises au surplus dans la formule unique

$$N = 2\left[2^{\alpha} - (-1)^{\frac{m^2-1}{8}}\right]\omega_1(m),$$

ainsi qu'on le verra facilement.

5. Nous venons de trouver le nombre complet des solutions, tant propres qu'impropres, de l'équation

$$n = X^2 + 4Y^2 + 4Z^2 + 8T^2.$$

Mais on peut aussi demander séparément le nombre M des solutions propres, pour lesquelles aucun entier > 1 ne divise à la fois X, Y, Z, T. Il faut alors substituer à la fonction $\omega_1(m)$ la fonction $O_1(m)$, indiquée dans l'article précédent, et définie au moyen de la décomposition de m en facteurs premiers,

$$m = \prod (p^{\mu}),$$

par l'équation

$$O_1(m) = \prod \left[p^{\mu} + (-1)^{\frac{p^2-1}{8}} p^{\mu-1}\right].$$

Cette fonction $O_1(m)$ avait du reste été déjà employée pour un usage semblable dans le cahier de septembre 1861, où elle est désignée par la simple lettre R. Voici comment elle détermine M pour l'équation

$$n = X^2 + 4Y^2 + 4Z^2 + 8T^2$$

qui nous occupe à présent.

1° Pour n impair, $n = m$, on a

$$M = 0$$

quand $m = 4g + 3$, mais

$$N = 2O_1(m)$$

quand $m = 4g + 1$.

2° Pour n impairement pair, $n = 2m$, on a

$$M = 0.$$

3° Pour n divisible par 4, non par 8, $n = 4m$, on a

$$M = 4O_1(m)$$

quand $m = 8k + 1$, mais

$$M = 6O_1(m)$$

quand $m = 8k - 1$,

$$M = 8O_1(m)$$

quand $m = 8k - 3$, enfin

$$M = 10O_1(m)$$

quand $m = 8k + 3$.

4° Pour n divisible par 8, non par 16, $n = 8m$, on a

$$M = 14O_1(m)$$

si $m = 8k \pm 1$, mais

$$M = 18O_1(m)$$

si $m = 8k \pm 3$.

5° Enfin pour n divisible par 16, que le quotient soit pair ou impair, c'est-à-dire pour $n = 2^\alpha m$, $\alpha > 3$, on a

$$M = 3.2^{\alpha-1}O_1(m),$$

quelle que soit la forme linéaire de m.

SUR LA FORME

$X^2 + 8Y^2 + 8Z^2 + 16T^2$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

1. Étant donné un entier n pair ou impair (que nous représenterons par $2^\alpha m$, m étant impair et l'exposant α pouvant se réduire à zéro), on demande le nombre N des représentations de n par la forme

$$X^2 + 8Y^2 + 8Z^2 + 16T^2,$$

c'est-à-dire le nombre N des solutions de l'équation

$$n = 2^\alpha m = X^2 + 8Y^2 + 8Z^2 + 16T^2,$$

où X, Y, Z, T sont des entiers positifs, nuls ou négatifs. Or il est évident que l'on a

$$N = 0$$

quand n est un entier impair de l'une des trois formes $8k + 3$, $8k + 5$, $8k + 7$, et aussi quand n est impairement pair, $n = 2m$. Ces cas exclus, on a $N > 0$, et la valeur précise de N se conclut facilement de ce que nous avons dit (dans le cahier de novembre 1861) au sujet de la forme

$$x^2 + 2y^2 + 4z^2 + 8t^2,$$

et aussi de ce qu'on trouve en tête du présent cahier concernant la forme

$$X^2 + 2Y^2 + 2Z^2 + 4T^2.$$

Les fonctions numériques à employer seront donc d'une part la

somme $\zeta_1(m)$ des diviseurs de m, et d'autre part la somme

$$\sum (-1)^{\frac{i-1}{2}} i,$$

où le signe sommatoire porte successivement sur tous les entiers impairs et positifs i qui peuvent figurer dans l'équation

$$m = i^2 + 4s^2,$$

l'entier s étant indifféremment pair ou impair, positif, nul ou négatif.

2. Soit d'abord n impair, $n = m = 8k + 1$, les autres formes linéaires de m ayant été exclues. Je remarquerai que l'équation

$$m = 8k + 1 = X^2 + 8Y^2 + 8Z^2 + 16T^2$$

ne diffère pas au fond de celle-ci

$$m = 8k + 1 = X^2 + 2U^2 + 4V^2 + 8Z^2,$$

attendu que U et V ne pouvant être que pairs d'après la forme linéaire de m, rien n'empêche de prendre

$$U = 2Y \qquad V = 2T.$$

Mais le nombre des solutions de l'équation

$$m = 8k + 1 = X^2 + 2U^2 + 4V^2 + 8Z^2$$

s'exprime par

$$\zeta_1(m) + \sum (-1)^{\frac{i-1}{2}} i.$$

Pour le nombre N des solutions de notre équation

$$m = 8k + 1 = X^2 + 8Y^2 + 8Z^2 + 16T^2$$

on a donc également

$$N = \zeta_1(m) + \sum (-1)^{\frac{i-1}{2}} i.$$

Je ne crois pas qu'il soit nécessaire d'ajouter des exemples.

5. Passons aux entiers divisibles par 4, et faisons en conséquence $\alpha = 2 + \beta$, β étant nul ou positif. L'équation à traiter sera

$$4.2^\beta m = X^2 + 8Y^2 + 8Z^2 + 16T^2.$$

Or X y est nécessairement pair, $X = 2U$. L'équation dont il s'agit revient donc à celle-ci

$$2^\beta m = U^2 + 2Y^2 + 2Z^2 + 4T^2.$$

dont nous nous sommes occupés plus haut (page 1).

La détermination du nombre N des solutions de notre équation

$$n = X^2 + 8X^2 + 8Z^2 + 16T^2$$

étant ainsi réduite (dans l'hypothèse de n multiple de 4) à une question déjà discutée, nous n'avons plus qu'à transcrire les résultats propres aux divers cas.

Pour n divisible par 4, non par 8, $n = 4m$, on trouve

$$N = 2\zeta_1(m).$$

Pour n divisible par 8, non par 16, $n = 8m$, il vient

$$N = 4\zeta_1(m).$$

Pour n divisible par 16, non par 32, la formule est

$$N = 8\zeta_1(m).$$

Enfin pour n divisible par 32, quel que soit le quotient pair ou impair, on a toujours

$$N = 24\zeta_1(m).$$

La fonction numérique

$$\sum (-1)^{\frac{i-1}{2}} i$$

ne se présente, comme on voit, dans l'expression de N que quand il s'agit d'un nombre impair $8k+1$. Partout ailleurs on n'a besoin que de la fonction $\zeta_1(m)$, comme s'il ne s'agissait que de la forme

$$x^2+y^2+z^2+t^2,$$

considérée par Jacobi.

Je viens de déterminer le nombre *total* N des représentations propres ou impropres de n par la forme

$$X^2+8Y^2+8Z^2+16T^2.$$

On pourrait aussi désirer de connaître à part le nombre M des représentations *propres*, c'est-à-dire le nombre des représentations où les indéterminées X, Y, Z, T n'ont pour plus grand commun diviseur que l'unité. Mais je ne m'arrêterai pas à la solution de cette seconde question qui se rattache toujours à la première. Il y a du reste, à ce sujet, une méthode générale qui s'offre d'elle-même, et nous n'avons aucun détail particulier digne d'intérêt à y ajouter à l'occasion de la forme qui nous occupe.

NOUVEAU THÉORÈME

CONCERNANT

LES NOMBRES PREMIERS DE LA FORME $16g+11$;

Par M. J. LIOUVILLE.

Nous avons déjà eu occasion de nous occuper des nombres premiers de la forme $16g+11$. Le théorème nouveau que nous voulons donner à leur sujet consiste en ce que si m désigne un tel nombre, on pourra poser au moins une fois (et toujours un nombre impair de fois) l'équation

$$m = 2^{\alpha+3}x^2 + p^{4l+1}y^2,$$

x et y étant des entiers impairs et p un nombre premier de la forme $8k+3$ qui ne divise pas y. On admet pour l et pour α la valeur zéro.

Les entiers contenus dans la formule

$$2^{\alpha+3}x^2$$

forment les séries suivantes

$$\begin{array}{l} 8.1^2,\quad 8.3^2,\quad 8.5^2,\ldots,\\ 16.1^2,\ 16.3^2,\ 16.5^2,\ldots,\\ 32.1^2,\ 32.3^2,\ 32.5^2,\ldots;\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Notre théorème consiste donc en ce que si d'un nombre premier donné m de la forme $16g+11$, on retranche tant que faire se peut ces divers nombres, il y aura un nombre impair de restes exprimables par le produit

$$p^{4l+1}y^2,$$

p étant un nombre premier $8k+3$ qui ne divise pas y.

Ainsi on a

$$11 = 8.1^2 + 3.1^2.$$

De même on a pour 43 l'équation canonique

$$43 = 32.1^2 + 11.1^2.$$

L'équation

$$43 = 16.1^2 + 3^3.1^2$$

ne doit pas être comptée ici, parce que l'exposant 3 n'est pas de la forme $4l + 1$.

Il y a également une seule équation canonique pour 59, savoir

$$59 = 16.1^2 + 43.1^2.$$

Mais pour 107 on en a trois :

$$107 = 8.1^2 + 11.3^2,$$
$$107 = 32.1^2 + 3.5^2,$$
$$107 = 64.1^2 + 43.1^2.$$

Enfin pour 139 on en trouve cinq :

$$139 = 8.1^2 + 131.1^2,$$
$$139 = 8.3^2 + 67.1^2,$$
$$139 = 32.1^2 + 107.1^2,$$
$$139 = 64.1^2 + 3.5^2,$$
$$139 = 128.1^2 + 11.1^2.$$

Je ne pousserai pas plus loin ces vérifications.

NOUVEAU THÉORÈME

CONCERNANT

LES NOMBRES PREMIERS DE LA FORME $8\mu + 1$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

Soit m un nombre premier donné, de la forme $8\mu + 1$. Posons de toutes les manières possibles l'équation

$$m = 16x^2 + p^{4l+1}y^2,$$

x, y étant des entiers positifs, x pair ou impair à volonté, y naturellement impair. Quant à p, c'est un nombre premier $(8\nu + 1)$ qui ne divise pas y. On admet pour l la valeur zéro. Il s'agit d'indiquer une règle simple qui dise à priori si le nombre N des décompositions de m ainsi obtenues est pair ou impair. Dans le cas de N impair, on est sûr qu'il y a au moins une décomposition.

Pour répondre à cette question, il faut d'abord mettre m sous la forme

$$m = a^2 + 16b^2,$$

ce qu'on peut faire d'une seule manière. On cherchera ensuite le nombre σ des facteurs premiers (égaux ou inégaux) des deux formes $8k + 1$, $8k + 3$, qui entrent dans la composition de a. La règle demandée sera fournie alors par la congruence

$$N \equiv b + \sigma + 1 \pmod{2}.$$

Ainsi N est impair quand b et σ sont tous les deux pairs ou tous les deux impairs. Mais N est pair quand b est pair et σ impair, et quand b est impair et σ pair.

Soit d'abord

$$m = 17 = 1^2 + 16.1^2.$$

On aura $\sigma = 1$, $b = 1$, donc N pair. Or il est évident que $N = 0$.

Soit en second lieu

$$m = 41 = 5^2 + 16.1^2.$$

On aura encore $\sigma = 0$, $b = 1$, donc N pair; et il est aisé de s'assurer que cette fois encore $N = 0$.

Il en est de même pour

$$m = 3^2 + 16.2^2 = 73,$$

nombre premier $8\mu + 1$ pour lequel $\sigma = 1$ et $b = 2$.

Mais pour

$$m = 89 = 5^2 + 16.2^2,$$

on a $b = 2$, $\sigma = 0$. Donc N doit être impair. Et en effet on a cette fois une décomposition canonique :

$$89 = 16.1^2 + 73.1^2.$$

Nous ne pousserons pas plus loin ces exemples.

THÉORÈME

CONCERNANT

LE PRODUIT DE DEUX NOMBRES PREMIERS INÉGAUX DE LA FORME $8\mu+3$;

Par M. J. LIOUVILLE.

Soient a et b deux nombres premiers *inégaux* de la forme $8\mu+3$. Nous aurons au sujet de leur produit m ce théorème, que l'on peut poser au moins une fois (et toujours un nombre impair de fois) l'équation

$$m = 16x^2 + p^{4l+1}y^2,$$

x et y étant des entiers positifs, x pair ou impair à volonté, y naturellement impair; quant à p, c'est un nombre premier (de la forme $8\nu+1$) qui ne divise pas y : on admet pour l la valeur zéro.

En d'autres termes, si du produit m on retranche tant que faire se peut les entiers exprimés par $16x^2$, savoir

$$16.1^2,\ 16.2^2,\ 16.3^2,\ 16.4^2,\ldots,$$

il y aura un nombre impair de restes susceptibles d'être mis sous la forme

$$p^{4l+1}y^2,$$

p désignant un nombre premier $(8\nu+1)$ qui ne divise pas y

Soit, par exemple, $a=3$, $b=11$, d'où $m=33$. On aura

$$33 = 16.1^2 + 17.1^2.$$

Soit ensuite $a=3$, $b=19$, d'où $m=57$. On aura

$$57 = 16.1^2 + 41.1^2.$$

Soit encore $a = 3$, $b = 43$, d'où $m = 129$. Nous aurons de même une seule équation canonique :

$$129 = 16.1^2 + 113.1^2;$$

car le reste 65 obtenu en retranchant 16.2^2 (ou 64) de 129 est le produit de 13 par 5 et n'a pas la forme voulue.

Pour $a = 11$, $b = 19$, c'est-à-dire pour $m = 209$, je ne trouve également que l'équation canonique

$$209 = 16.1^2 + 193.1^2.$$

Mais pour $a = 11$, $b = 43$, c'est-à-dire pour $m = 473$, on en a trois, savoir

$$473 = 16.1^2 + 457.1^2,$$
$$473 = 16.2^2 + 409.1^2,$$
$$473 = 16.5^2 + 73.1^2.$$

Le reste 329 qu'on obtient en retranchant 16.3^2 de 473 est le produit de 7 par 47 et n'a pas la forme demandée. Il en est de même du reste 217 relatif à 16.4^2 et qui est le produit de 7 par 31.

Je ne pousserai pas plus loin ces vérifications numériques.

THÉORÈME

CONCERNANT

LA QUATRIÈME PUISSANCE D'UN NOMBRE PREMIER DE LA FORME $8\mu+3$;

Par M. J. LIOUVILLE.

Soit m un nombre premier donné, de la forme $8\mu + 3$. Le théorème que nous voulons énoncer au sujet de la quatrième puissance de ce nombre consiste en ce que l'on peut poser au moins une fois, et toujours un nombre impair de fois, l'équation

$$m^4 = 16x^2 + p^{4l+1}y^2,$$

x et y étant des entiers positifs, x pair ou impair à volonté, y naturellement impair. Quant à p, c'est un nombre premier (de la forme $8\nu + 1$) qui ne divise pas y. On admet pour l la valeur zéro.

En d'autres termes, si de la quatrième puissance d'un nombre premier donné de la forme $8\mu + 3$, on retranche, tant que faire se peut, les termes de la suite

$$16.1^2,\ 16.2^2,\ 16.3^2,\ 16.4^2,\ldots,$$

il y aura un nombre impair de restes susceptibles d'être mis sous la forme

$$p^{4l+1}y^2,$$

p désignant un nombre premier (naturellement de la forme $8\nu + 1$ qui ne divise pas y.

Je me bornerai au seul exemple de

$$m = 3,$$

c'est-à-dire de $m^4 = 81$, pour lequel je trouve l'équation canonique

$$81 = 16.2^2 + 17.1^2.$$

Le reste 65 obtenu en retranchant 16 de 81 est le produit de 13 par 5 et n'a pas la forme voulue.

Si l'on posait, sous les mêmes conditions pour m, x, y, p, l'équation

$$m^2 = 16x^2 + p^{4l+1}y^2,$$

où le premier membre est le carré au lieu de la quatrième puissance de m, le nombre des solutions pourrait se réduire à zéro : il serait nul pour $m = 3$, par exemple. En tout cas il serait constamment pair. Il suit de là que le nombre des solutions de notre équation

$$m^4 = 16x^2 + p^{4l+1}y^2$$

resterait impair (par conséquent au moins égal à l'unité) si l'on exigeait que les entiers x, y fussent premiers entre eux.

Cet article complète en un certain sens l'article précédent; mais il y aurait bien des choses à ajouter. Nous reviendrons un jour sur toutes ces questions, et il ne nous sera pas inutile d'avoir présenté d'avance des exemples simples.

SUR LA

THÉORIE DES FONCTIONS ELLIPTIQUES

ET SES

APPLICATIONS A L'ARITHMÉTIQUE;

PAR M. HERMITE.

LETTRE ADRESSÉE A M. LIOUVILLE.

« Depuis notre dernier entretien sur les questions arithmétiques qui sont l'objet de vos recherches et où vous m'avez donné un nouvel exemple de la grande fécondité des méthodes dont vous conservez le principe, je pense avoir réussi, dans une certaine mesure, à donner satisfaction à un désir que vous m'avez plusieurs fois exprimé relativement aux beaux théorèmes de M. Kronecker sur les nombres de classes de formes quadratiques. Ces théorèmes, qui semblent par leur nature devoir naturellement entrer dans le cercle de vos études sur les fonctions numériques, restaient cependant comme isolés et appartenant à un ordre d'idées très-distinct où la théorie de la multiplication complexe dans les fonctions elliptiques paraissait seule pouvoir donner accès. Les démonstrations du P. Joubert découlent en effet de cette théorie où la notion de classe de formes quadratiques s'offre de la manière la plus nécessaire et joue le rôle le plus important. J'attache à ces démonstrations un grand prix, car elles éclairent et étendent la théorie arithmétique des formes en montrant que les théoremes donnés il y a si longtemps par M. Gauss sont autant de propriétés des fonctions elliptiques, et elles ajoutent un des plus remarquables exemples de ces liens cachés qui réunissent l'analyse transcendante à l'arithmétique. En parvenant par une autre voie à ces

théorèmes de M. Kronecker, c'est à l'ordre d'idées qui vous appartient que je pense les avoir rattachés de la manière la plus directe, et, si je ne me trompe, dans le sens même de vos prévisions, car la notion arithmétique de classe se trouve remplacée par l'idée beaucoup plus simple et plus élémentaire des formes réduites.

» Je suis parti des identités que fournit le développement des quotients de fonctions Θ, en séries simples de sinus ou de cosinus, et dont Jacobi a montré le premier la grande importance en découvrant de cette manière l'expression du nombre des décompositions d'un entier en quatre carrés par la somme des diviseurs de cet entier. Une extension fort simple de ce procédé consiste à considérer, au lieu seulement de $\sin\operatorname{am} z$, $\cos\operatorname{am} z$, $\Delta\operatorname{am} z$, les produits de fonctions doublement périodiques par des puissances de quantités Θ, c'est-à-dire des expressions ayant la période $4K$, et se multipliant par un facteur exponentiel, lorsqu'on ajoute $2iK'$ à la variable.

» En faisant $z = \frac{2Kx}{\pi}$ et posant avec Jacobi

$$\Theta(z) = 1 - 2q\cos 2x + 2q^4\cos 4x - 2q^9\cos 6x + \ldots,$$

$$H(z) = 2\sqrt[4]{q}\sin x - 2\sqrt[4]{q^9}\sin 3x + 2\sqrt[4]{q^{25}}\sin 5x - \ldots,$$

$$\Theta_1(z) = 1 + 2q\cos 2x + 2q^4\cos 4x + 2q^9\cos 6x + \ldots,$$

$$H_1(z) = 2\sqrt[4]{q}\cos x + 2\sqrt[4]{q^9}\cos 3x + 2\sqrt[4]{q^{25}}\cos 5x + \ldots,$$

de sorte qu'on ait

$$\sin\operatorname{am} z = \frac{1}{\sqrt{k}}\frac{H(z)}{\Theta(z)}, \quad \cos\operatorname{am} z = \sqrt{\frac{k'}{k}}\frac{H_1(z)}{\Theta(z)}, \quad \Delta\operatorname{am} z = \sqrt{k'}\frac{\Theta_1(z)}{\Theta(z)},$$

les plus simples de ces fonctions seront

$$(1) \qquad \frac{H(z)\Theta_1(z)}{\Theta(z)}, \quad \frac{H_1(z)\Theta_1(z)}{\Theta(z)}, \quad \frac{H(z)H_1(z)}{\Theta(z)},$$

$$(2) \qquad \frac{H^2(z)}{\Theta(z)}, \quad \frac{H_1^2(z)}{\Theta(z)}, \quad \frac{\Theta_1^2(z)}{\Theta(z)}.$$

Si on les développe en séries de sinus et de cosinus, on trouvera pour

les premières

$$\sqrt{\frac{K}{2\pi}}\frac{H(z)\Theta_1(z)}{\Theta(z)} = \sin x\sqrt[4]{q}$$
$$+\sin 3x\sqrt[4]{q^9}(1+2q^{-1})$$
$$+\sin 5x\sqrt[4]{q^{25}}(1+2q^{-1}+2q^{-4})$$
$$+\sin 7x\sqrt[4]{q^{49}}(1+2q^{-1}+2q^{-4}+2q^{-9})$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+\sin(2n+1)x\sqrt[4]{q^{(2n+1)^2}}(1+2q^{-1}+2q^{-4}+\ldots+2q^{-n^2}),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sqrt{\frac{k'K}{2\pi}}\frac{H_1(z)\Theta_1(z)}{\Theta(z)} = \cos x\sqrt[4]{q}$$
$$-\cos 3x\sqrt[4]{q^9}(1-2q^{-1})$$
$$+\cos 5x\sqrt[4]{q^{25}}(1-2q^{-1}+2q^{-4})$$
$$-\cos 7x\sqrt[4]{q^{49}}(1-2q^{-1}+2q^{-4}-2q^{-9})$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+(-1)^n\cos(2n+1)x\sqrt[4]{q^{(2n+1)^2}}\left[\begin{array}{l}1-2q^{-1}+2q^{-4}-\ldots\\ \quad+2(-1)^n q^{n^2}\end{array}\right],$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sqrt{\frac{kK}{2\pi}}\frac{H(z)H_1(z)}{\Theta(z)} = \sin 2x\, q\,(2\sqrt[4]{q^{-1}})$$
$$+\sin 4x\, q^4\,(2\sqrt[4]{q^{-1}}+2\sqrt[4]{q^{-9}})$$
$$+\sin 6x\, q^9\,(2\sqrt[4]{q^{-1}}+2\sqrt[4]{q^{-9}}+2\sqrt[4]{q^{-25}})$$
$$+\sin 8x\, q^{16}\,(2\sqrt[4]{q^{-1}}+2\sqrt[4]{q^{-9}}+2\sqrt[4]{q^{-25}}+2\sqrt[4]{q^{-49}})$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+\sin 2nx\, q^{n^2}\,(2\sqrt[4]{q^{-1}}+2\sqrt[4]{q^{-9}}+\ldots+2\sqrt[4]{q^{-(2n-1)^2}}).$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Quant aux secondes, introduisons la fonction suivante :

$$Z(x) = \cos 2x\, q\,(2\sqrt[4]{q^{-1}})$$
$$-\cos 4x\, q^4\,(2\sqrt[4]{q^{-1}}-2\sqrt[4]{q^{-9}})$$
$$+\cos 6x\, q^9\,(2\sqrt[4]{q^{-1}}-2\sqrt[4]{q^{-9}}+2\sqrt[4]{q^{-25}})$$
$$-\cos 8x\, q^{16}\,(2\sqrt[4]{q^{-1}}-2\sqrt[4]{q^{-9}}+2\sqrt[4]{q^{-25}}-2\sqrt[4]{q^{-49}})$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$-(-1)^n\cos 2nx\, q^{n^2}\left[2\sqrt[4]{q^{-1}}-2\sqrt[4]{q^{-9}}+\ldots-2(-1)^n\sqrt[4]{q^{-(2n-1)^2}}\right].$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

et ces constantes, savoir :

$$A = \frac{\sqrt[4]{q^3}}{1-q} - \frac{\sqrt[4]{q^{15}}}{1-q^3} + \frac{\sqrt[4]{q^{35}}}{1-q^5} - \frac{\sqrt[4]{q^{63}}}{1-q^7} + \ldots = \sum (-1)^m \frac{q^{\frac{1}{4}(2m+1)(2m+3)}}{1-q^{2m+1}},$$

$$B = \frac{\sqrt[4]{q^3}}{1+q} + \frac{\sqrt[4]{q^{15}}}{1+q^3} + \frac{\sqrt[4]{q^{35}}}{1+q^5} + \frac{\sqrt[4]{q^{63}}}{1+q^7} + \ldots = \sum \frac{q^{\frac{1}{4}(2m+1)(2m+3)}}{1+q^{2m+1}},$$

$$C = \frac{1}{4} + \frac{q^3}{1+q^2} + \frac{q^6}{1+q^4} + \frac{q^{12}}{1+q^6} + \ldots = \frac{1}{4} + \sum \frac{q^{m^2+m}}{1+q^{2m}},$$

ou encore :

$$\sqrt[4]{q}\,A = \sum_{m=1} (-1)^{m+1} \frac{q^{m^2}}{1-q^{2m-1}},$$

$$\sqrt[4]{q}\,B = \sum_{m=1} \frac{q^{m^2}}{1+q^{2m-1}},$$

$$\sqrt[4]{q}\,C = \frac{1}{4}\sqrt[4]{q} + \sum_{m=1} \frac{q^{\frac{1}{4}(2m+1)^2}}{1+q^{2m}};$$

elles donnent :

$$\frac{kK}{2\pi}\sin\operatorname{am} z\, H(z) = \frac{\sqrt{k}\,K}{2\pi}\,\frac{H^2(z)}{\Theta(z)} = A\,\Theta(z) - \Theta(o)Z,$$

$$\frac{k'K}{2\pi}\cos\operatorname{am} z\, H_1(z) = \frac{\sqrt{kk'}\,K}{2\pi}\,\frac{H_1^2(z)}{\Theta(z)} = B\,\Theta(z) - \Theta_1(o)Z,$$

$$\frac{K}{2\pi}\,\Delta\operatorname{am} z\, \Theta_1(z) = \frac{\sqrt{k'}\,K}{2\pi}\,\frac{\Theta_1^2(z)}{\Theta(z)} = C\,\Theta(z) - H_1(o)Z.$$

Ce second groupe de fonctions se distingue essentiellement du premier par la présence des fonctions complètes A, B, C, dont voici le caractère arithmétique. Désignant par n les nombres entiers $\equiv 3 \bmod 4$, on aura d'abord

$$A = \sum a_n q^{\frac{1}{4}n}, \qquad B = \sum (-1)^{\frac{n-3}{4}} a_n q^{\frac{1}{4}n},$$

le coefficient a_n étant la somme des valeurs de l'expression $(-1)^{\frac{d-1}{2}}$, en prenant pour d tous les diviseurs de n inférieurs à sa racine carrée;

nous le représenterons ainsi :

$$a_n = \sum (-1)^{\frac{d-1}{2}}.$$

» Faisons ensuite, en supposant n pair,

$$C = \frac{1}{4} + \sum (-1)^{\frac{n}{2}} c_n q^n.$$

» Si l'on désigne par d les diviseurs impairs de n inférieurs à sa racine carrée et par d' les diviseurs impairs plus grands que sa racine carrée, on aura

$$c_n = \sum (-1)^{\frac{d'-1}{2}} - \sum (-1)^{\frac{d-1}{2}}.$$

» Voici donc deux nouveaux exemples de ces parties de fonctions que M. Kronecker a introduites en arithmétique et qui s'offrent sous un point de vue si différent dans les recherches délicates et profondes de ce savant géomètre sur les modules qui se rapportent à la multiplication complexe. Par cette nouvelle origine, elles se trouvent rattachées de la manière la plus immédiate à l'ensemble de vos travaux sur les fonctions numériques, et peut-être même ne sera-t-il pas impossible de définir par des équations différentielles les fonctions qui leur donnent naissance en partant de ces expressions :

$$2\pi A = \sqrt{k}\int_0^K \frac{H^2(z)}{\Theta(z)}\,dz, \quad 2\pi B = \sqrt{kk'}\int_0^K \frac{H_1^2(z)}{\Theta(z)}\,dz, \quad 2\pi C = \sqrt{k'}\int_0^K \frac{\Theta_1^2(z)}{\Theta(z)}\,dz.$$

» Je remarque encore, comme un nouveau trait de la distinction à établir entre les fonctions (1) et (2), que la quantité $Z(x)$ qui donne A et B en y faisant $x = 0$ et $x = \frac{\pi}{2}$, conduit pour $x = \frac{\pi}{4}$ à cette relation :

$$\sqrt[4]{q}\,Z\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sum_0^\infty {}_n (-1)^n \frac{q^{4(n+1)^2}}{1+q^{8n+6}} - \sum_0^\infty {}_n \frac{q^{4(n+1)^2-2}}{1+q^{8n+2}}$$

dont le développement a la forme

$$Z\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sum (-1)^{\frac{n+1}{8}} k_n q^{\frac{n}{4}}.$$

Le nombre n est $\equiv -1$ mod. 8; k_n est la somme des quantités $\left(\frac{-2}{d}\right) = (-1)^{\frac{d^2-1}{8}+\frac{d-1}{2}}$ pour tous les diviseurs de n inférieurs à sa racine carrée, c'est-à-dire encore une partie de fonction. Au contraire, dans ces cas et d'autres analogues, les développements des expressions (1) ne conduisent jamais qu'à des fonctions numériques complètes.

» Après ces deux groupes de fonctions, la suivante :

$$\frac{H^2(z)\Theta_1(z)}{\Theta^2(z)},$$

pourra servir d'exemple du cas le plus simple qui s'offre ensuite dans la série des expressions obtenues en multipliant par la première puissance d'une des quantités Θ, une fonction doublement périodique. Elle donne, en désignant par $\mathcal{A}$ une constante, ce développement

$$\begin{aligned}
\frac{K}{2\pi}\sqrt{\frac{2kK}{\pi}}\frac{H^2(z)\Theta_1(z)}{\Theta^2(z)}
= \mathcal{A}\Theta_1(z) &- \cos 2xq\sqrt[4]{q^{-1}}\\
&- \cos 4xq^4(\sqrt[4]{q^{-1}} + 3\sqrt[4]{q^{-9}})\\
&- \cos 6xq^9(\sqrt[4]{q^{-1}} + 3\sqrt[4]{q^{-9}} + 5\sqrt[4]{q^{-25}})\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&- \cos 2nxq^{n^2}\left(\sqrt[4]{q^{-1}} + 3\sqrt[4]{q^{-9}} + \ldots + (2n-1)\sqrt[4]{q^{-(2n-1)^2}}\right).\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

» On doit donc encore regarder $\mathcal{A}$ comme une fonction complète, dont la valeur sous une forme analytique toute semblable à celle de A, B, C, sera

$$2\pi\mathcal{A} = \sqrt{\frac{2kK}{\pi}}\int_0^K \frac{H^2(z)\Theta_1(z)}{\Theta^2(z)}\,dz.$$

» Mais tandis que A, B, C se rapportent sous le point de vue arithmétique aux fonctions des diviseurs des nombres, $\mathcal{A}$, comme vous allez voir, conduit aux fonctions qui expriment le nombre des classes quadratiques pour toutes les formes de déterminant $-n$, n étant $\equiv 3$ mod. 4.

» Pour le démontrer, je regarde l'expression $\frac{H^2(z)\Theta_1(z)}{\Theta^2(z)}$ comme le produit de ces deux facteurs : $\frac{H(z)\Theta_1(z)}{\Theta(z)}$ et $\frac{H(z)}{\Theta(z)} = \sqrt{k}\sin\operatorname{am} z$; or nous avons trouvé :

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{K}{2\pi}}\,\frac{H(z)\Theta_1(z)}{\Theta(z)} &= \sin x\sqrt[4]{q} \\
&+ \sin 3x\sqrt[4]{q^9}\,(1+2q^{-1}) \\
&+ \sin 5x\sqrt[4]{q^{25}}\,(1+2q^{-1}+2q^{-4}) \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&= \sum \sin(2n+1)x\sqrt[4]{q^{(2n+1)^2}} \times \sum q^{-a^2},
\end{aligned}$$

le nombre a devant prendre les valeurs

$$a = 0,\quad \pm 1,\quad \pm 2,\ldots,\quad \pm n,$$

et l'on a

$$\frac{\sqrt{kK}}{\pi}\,\frac{H(z)}{\Theta(z)} = 2\sin x\,\frac{\sqrt{q}}{1-q} + 2\sin 3x\,\frac{\sqrt{q^3}}{1-q^3} + 2\sin 5x\,\frac{\sqrt{q^5}}{1-q^5} + \text{etc.}$$

de sorte qu'en multipliant membre à membre les deux séries, on devra précisément retomber sur le développement ci-dessus de

$$\frac{K}{2\pi}\sqrt{\frac{2kK}{\pi}}\,\frac{H^2(z)\Theta_1(z)}{\Theta^2(z)}.$$

On trouve ainsi, en se bornant au terme constant :

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A} &= \sum \frac{\sqrt{q^{2n+1}}}{1-q^{2n+1}}\sqrt[4]{q^{(2n+1)^2}}\,(1+2q^{-1}+2q^{-4}+\ldots+2q^{-n^2}), \\
&= \sum \frac{\sqrt{q^{2n+1}}}{1-q^{2n+1}}\,q^{\frac{(2n+1)^2}{4}-a^2},
\end{aligned}$$

expression qu'il est aisé de développer suivant les puissances de q en remplaçant la fraction $\frac{\sqrt{q^{2n+1}}}{1-q^{2n+1}}$ par

$$\sqrt{q^{2n+1}}\,(1+q^{2n+1}+q^{2(2n+2)}+\text{etc.}) = \sum q^{\frac{2n+1}{2}+(2n+1)b}.$$

b désignant tous les nombres entiers de zéro à l'infini. En posant

$$N = (2n+1)(2n+4b+3) - 4a^2,$$

et désignant par $F(N)$ le nombre de fois que cette équation aura lieu pour une valeur de N, en supposant n et b entiers et positifs, a compris dans la série :

$$0, \quad \pm 1, \quad \pm 2, \ldots \quad \pm n,$$

on aura évidemment

$$x = \sum F(N) q^{\frac{1}{4}N}.$$

» Ceci posé, j'observe que la valeur de N représentera tous les nombres entiers $\equiv 3 \bmod 4$, et qu'on peut l'écrire de ces trois manières, en faisant correspondre à chacune d'elles une forme quadratique de déterminant $-N$, savoir :

$$\text{I.} \left\{ \begin{array}{l} N = (2n+1)(2n+4b+3) - 4a^2, \\ \quad (2n+1, \quad 2a, \quad 2n+4b+3). \end{array} \right.$$

$$\text{II.} \left\{ \begin{array}{l} N = (2n+1)(4n+4b+4-4a) - (2n+1-2a)^2, \\ \quad (2n+1, \quad 2n+1-2a, \quad 4n+4b+4-4a). \end{array} \right.$$

$$\text{III.} \left\{ \begin{array}{l} N = (2n+1)(4n+4b+4+4a) - (2n+1+2a)^2, \\ \quad (2n+1, \quad 2n+1+2a, \quad 4n+4b+4+4a). \end{array} \right.$$

» En employant la première pour les valeurs de a inférieures, abstraction faite du signe à la limite $\frac{2n+1}{4}$, la forme quadratique correspondante représentera toutes les formes réduites de déterminant $-N$, où le coefficient moyen est pair, et qui sont, par conséquent, de l'ordre proprement primitif, chacune d'elles étant prise une seule fois. Les classes ambiguës seront renfermées dans ce premier groupe et correspondront à $a = 0$ (Gauss, *Rech. arith.*, p. 288). Pour les valeurs de a qui vont de la limite inférieure $\frac{2n+1}{4}$ à la limite supérieure n, nous emploierons la seconde expression en leur attribuant le signe +

et la troisième en leur donnant le signe —. On aura ainsi, deux fois répétée, une série de formes (p, q, r) de déterminant — N où se trouvent satisfaites les conditions :

$$q > 0, \quad 2q < p, \quad 2q < r.$$

» En permutant p et r lorsqu'on aura $p > r$, cette série donnera toutes les formes réduites de déterminant — N où le coefficient moyen est impair et positif, l'un des coefficients extrêmes étant aussi un nombre impair. On doublera leur nombre si on y joint les formes opposées $(p, -q, r)$ qui en sont distinctes et appartiennent à des classes différentes, puisqu'il n'existe point de formes ambiguës ayant un coefficient moyen impair. Par conséquent, à la totalité des deux séries de valeurs positives et négatives de a correspond exactement la totalité des formes réduites, proprement primitives du déterminant — N. Ainsi la fonction $F(\mathrm{N})$ qui s'est offerte d'abord comme la somme des nombres de solutions des équations I, II et III, reçoit cette nouvelle et importante signification arithmétique de représenter le nombre des classes proprement primitives de déterminant — N. L'équation

$$\mathcal{A} = \sum F(\mathrm{N}) q^{\frac{1}{4}\mathrm{N}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2k\mathrm{K}}{\pi}} \int_0^{\mathrm{K}} \frac{\mathrm{H}^2(z)\Theta_1(z)}{\Theta^2(z)} dz,$$

envisagée sous ce nouveau point de vue, montre l'importance de la fonction complète de l'expression $\frac{\mathrm{H}^2(z)\Theta_1(z)}{\Theta^2(z)}$ et va donner très-aisément l'un des théorèmes de M. Kronecker.

» Je fais pour cela $x = 0$ dans l'équation

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{K}}{2\pi}\sqrt{\frac{2k\mathrm{K}}{\pi}} \frac{\mathrm{H}^2(z)\Theta_1(z)}{\Theta^2(z)} = \mathcal{A}\Theta_1(z) &- \cos 2xq\sqrt[4]{q^{-1}} \\
&- \cos 4xq^4\left(\sqrt[4]{q^{-1}} + 3\sqrt[4]{q^{-9}}\right) \\
&- \cos 6xq^9\left(\sqrt[4]{q^{-1}} + 3\sqrt[4]{q^{-9}} + 5\sqrt[4]{q^{-25}}\right) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

Le premier membre s'annulant, on voit immédiatement que le second membre, ordonné suivant les puissances de q, donne une série

dont le terme général est

$$q^{\frac{1}{4}N}\,\frac{\sum d' - \sum d}{2}.$$

L'exposant N est $\equiv 3 \bmod 4$, $\sum d'$ représente la somme des diviseurs de N supérieurs à sa racine carrée, et $\sum d$ la somme des diviseurs qui lui sont inférieurs. Le coefficient de $q^{\frac{1}{4}N}$ est donc précisément la fonction designée par $\Psi(N)$ et définie dans le Mémoire de M. Kronecker au moyen de la relation

$$\sum \Psi(n)q^n = \sum \frac{q^{n^2+n}}{(1-q^n)^2}.$$

En employant cette notation, on pourra donc écrire

$$\Theta_1(0)\sum F(N)q^{\frac{1}{4}N} = \frac{1}{2}\sum \Psi(N)q^{\frac{1}{4}N},$$

et en égalant dans les deux membres les coefficients d'une même puissance de q, on trouvera

$$F(N) + 2F(N-2^2) + 2F(N-4^2) + \ldots + 2F(N-4k^2) = \frac{1}{2}\Psi(N).$$

Or cette relation est donnée en ajoutant membre à membre les équations (V) et (VI) du Mémoire de M. Kronecker, et observant que la fonction $\varphi(m)$ qui y figure s'évanouit pour $m = N \equiv 3 \bmod 4$.

» D'autres théorèmes résultent d'une détermination différente de $\mathcal{A}$. En premier lieu, je fais le produit des deux séries

$$\Theta_1(z) = 1 + 2q\cos 2x + 2q^4\cos 4x + 2q^9\cos 6x + \ldots,$$

$$\frac{k\,K^2}{2\pi^2}\,\frac{H^2(z)}{\Theta^2(z)} = \sum \frac{nq^n}{1-q^{2n}} - \cos 2x\,\frac{q}{1-q^2} - \cos 4x\,\frac{2q^2}{1-q^4}, \ldots,$$

qui donne pour le terme constant dans le second membre l'expression

$$\sum \frac{nq^n}{1-q^{2n}} - \sum \frac{nq^{n^2+n}}{1-q^{2n}}.$$

» Ce même terme s'obtenant aussi en intégrant entre les limites zéro et K le premier membre, on aura

$$\frac{k\mathrm{K}}{2\pi^2}\int_0^{\mathrm{K}}\frac{\mathrm{H}^2(z)\Theta_1(z)}{\Theta^2(z)}dz = \sum\frac{nq^n}{1-q^{2n}} - \sum\frac{nq^{n^2+n}}{1-q^{2n}},$$

et par conséquent

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2k\mathrm{K}}{\pi}}\mathcal{A} = \sum\frac{nq^n}{1-q^{2n}} - \sum\frac{nq^{n^2+n}}{1-q^{2n}}.$$

Soit

$$\sum\frac{nq^n}{1-q^{2n}} = \sum\Phi_1(n)q^n,$$

$$\sum\frac{nq^{n^2+n}}{1-q^{2n}} = \sum\Psi_1(n)q^n,$$

$\Phi_1(n)$ représentera la somme de tous les diviseurs de n dont les conjugués sont impairs et $\Psi_1(n)$ la somme de tous les diviseurs moindres que $\sqrt{n}$ et qui ne sont pas de même parité que leurs conjugués. Ainsi pour n impair, $\Phi_1(n)$ coïncidera avec la somme de tous les diviseurs que M. Kronecker nomme $\Phi(n)$, et $\Psi_1(n)$ sera nul. Cela étant, l'équation

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2k\mathrm{K}}{\pi}}\sum F(\mathrm{N})q^{\frac{1}{4}\mathrm{N}} = \sum[\Phi_1(n) - \Psi_1(n)]q^n$$

donnera ce nouveau théorème où n est quelconque :

$$F(4n-1) + F(4n-3^2) + \ldots + F[4n-(2a+1)^2] = \Phi_1(n) - \Psi_1(n).$$

» Je considère en second lieu le produit des développements de $\mathrm{H}(z)$ et de la dérivée de $\cos\operatorname{am} z$, à savoir :

$$\mathrm{H}(z) = 2\sqrt[4]{q}\sin x - 2\sqrt[4]{q^9}\sin 3x + 2\sqrt[4]{q^{25}}\sin 5x - \ldots,$$

$$\frac{\sqrt{kk'}\mathrm{K}^2}{\pi^2}\frac{\mathrm{H}(z)\Theta_1(z)}{\Theta^2(z)} = \frac{\sqrt{q}}{1+q}\sin x + \frac{3\sqrt{q^3}}{1+q^3}\sin 3x + \frac{5\sqrt{q^5}}{1+q^5}\sin 5x + \ldots.$$

En opérant de même on trouvera

$$\frac{\sqrt{kk'}\mathrm{K}}{\pi^2}\int_0^{\mathrm{K}}\frac{\mathrm{H}^2(z)\Theta_1(z)}{\Theta^2(z)}dz = \sqrt{\frac{2k'\mathrm{K}}{\pi}}\,\mathcal{A} = \sum_{n=0}^{n=\infty}(-1)^n\frac{(2n+1)q^{\frac{1}{4}(2n+1)(2n+3)}}{1-q^{2n+1}},$$

et si l'on pose

$$\sum(-1)^n\frac{(2n+1)q^{\frac{1}{4}(2n+1)(2n+3)}}{1-q^{2n+1}} = \sum(-1)^{\frac{\mathrm{N}-3}{4}}\Psi_2(\mathrm{N})q^{\frac{1}{4}\mathrm{N}},$$

N représentera tous les nombres entiers $\equiv 3 \bmod 4$ et $\Psi_2(\mathrm{N})$ la somme des diviseurs de N inférieurs à la racine carrée. L'équation

$$\sqrt{\frac{2k'\mathrm{K}}{\pi}}\sum F(\mathrm{N})q^{\frac{1}{4}\mathrm{N}} = \sum(-1)^{\frac{\mathrm{N}-3}{4}}\Psi_2(\mathrm{N})q^{\frac{1}{4}\mathrm{N}}$$

donnera par suite ce troisième théorème

$$F(\mathrm{N}) - 2F(\mathrm{N}-2^2) + 2F(\mathrm{N}-4^2) - \ldots + 2(-1)^k F(\mathrm{N}-4k^2)$$

$$= (-1)^{\frac{\mathrm{N}-3}{4}}\Psi_2(\mathrm{N}) = (-1)^{\frac{\mathrm{N}-3}{4}}\frac{\Phi(\mathrm{N})-\Psi(\mathrm{N})}{2}.$$

» Le temps me manque en ce moment pour donner le système complet de toutes les relations de cette nature, et m'occuper des autres théorèmes de M. Kronecker et de ceux où le P. Joubert a introduit des fonctions numériques distinctes des précédentes. J'aurais surtout à retrouver cette relation

$$\sum \mathrm{F}(n)q^n = \frac{q^{\frac{1}{4}}}{\mathrm{H}(\mathrm{K})}\sum\frac{q^{n^2+3n+1}}{(1-q^{2n+1})^2},$$

qui sans doute doit résulter de combinaisons où entre la fonction $\frac{\Theta'^2(z)}{\Theta^2(z)}$. M. Kronecker, en la donnant comme l'expression analytique d'un de ses théorèmes, avait bien évidemment pressenti la signification qu'elle recevrait dans la théorie des fonctions elliptiques, et à cet égard je ne puis trop admirer la pénétration dont il a donné la preuve.

» Vous m'avez aussi plusieurs fois parlé de la décomposition des nombres en trois carrés; dans le cas où il s'agit des nombres $\equiv 3 \bmod 8$, et où les carrés sont tous impairs, voici comment on trouve le nombre des décompositions.

» Soit $\mathcal{A}_1$ ce que devient $\mathcal{A}$ par le changement de q en $-q$; en posant pour un instant $\varepsilon = \sqrt[4]{-1}$, on aura

$$\frac{\mathcal{A} - \varepsilon\mathcal{A}_1}{2} = \sum_0^\infty {}_n F(8n+3) q^{\frac{8n+3}{4}}.$$

Or on obtient aisément la valeur du premier membre. Introduisons dans l'intégrale x au lieu de $z = \frac{2Kx}{\pi}$, ce qui donnera

$$2\pi\mathcal{A} = \frac{2K}{\pi}\sqrt{\frac{2kK}{\pi}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{H^2(z)\Theta_1(z)}{\Theta^2(z)}dx.$$

Comme en changeant q en $-q$, les quantités

$$\frac{2K}{\pi},\quad \sqrt{\frac{2kK}{\pi}},\quad \Theta(z),\quad H(z),\quad \Theta_1(z)$$

deviennent

$$\frac{2k'K}{\pi},\quad \varepsilon\sqrt{\frac{2kK}{\pi}},\quad \Theta_1(z),\quad \varepsilon H(z),\quad \Theta(z),$$

on aura

$$2\pi\mathcal{A}_1 = e^3\frac{2k'K}{\pi}\sqrt{\frac{2kK}{\pi}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{H^2(z)\Theta(z)}{\Theta_1^2(z)}dx.$$

Mais par la substitution de $\frac{\pi}{2} - x$ à x, l'intégrale se change en celle-ci : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{H_1^2(z)\Theta_1(z)}{\Theta^2(z)}dx$, d'où résulte

$$2\pi\mathcal{A}_1 = \varepsilon^3\frac{2k'K}{\pi}\sqrt{\frac{2kK}{\pi}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{H_1^2(z)\Theta_1(z)}{\Theta^2(z)}dx,$$

et par suite, à cause de $\varepsilon^4 = -1$,

$$2\pi(\mathcal{A} - \varepsilon\mathcal{A}_1) = \frac{2K}{\pi}\sqrt{\frac{2kK}{\pi}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{[H^2(z) + k\,H_1^2(z)]\Theta_1(z)}{\Theta^2(z)}\,dx.$$

Or on a

$$H^2(z) + k'H_1^2(z) = k\Theta^2(z),$$

il s'ensuit que

$$2\pi(\mathcal{A} - \varepsilon\mathcal{A}_1) = \frac{2K}{\pi}\sqrt{\frac{2kK}{\pi}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} k\Theta_1(z)\,dx = \frac{\pi}{2}\sqrt{\left(\frac{2kK}{\pi}\right)^3}$$

et on en conclut la relation

$$\frac{\mathcal{A} - \varepsilon\mathcal{A}_1}{2} = \sum F(8n+3)q^{\frac{8n+3}{4}} = (\sqrt[4]{q} + \sqrt[4]{q^9} + \sqrt[4]{q^{25}} + \ldots)^3,$$

qui est l'expression de ce théorème arithmétique que le nombre des représentations d'un entier $N \equiv 3 \bmod. 8$, par la forme $x^2 + y^2 + z^2$, en supposant x, y, z de même signe, est précisément égal au nombre des classes quadratiques du déterminant $-N$ pour lesquelles un au moins des coefficients extrêmes est impair.

» Quant au cube de $\sqrt{\frac{2K}{\pi}}$ ou $\Theta_1(0)$, il est donné sous une forme singulière et dont je n'ai pu suffisamment approfondir la signification en faisant $x = 0$ dans l'équation

$$\frac{K}{2\pi}\Delta\,\mathrm{am}\,z\,\Theta_1(z) = C\Theta(z) - H_1(0)Z.$$

On obtient ainsi immédiatement

$$\sqrt{\left(\frac{2K}{\pi}\right)^3} = \Theta(0)\left(1 + 4\sum\frac{q^{m^2+m}}{1+q^{2m}}\right) - 4H_1(0)\sum(-1)^m\frac{q^{\frac{1}{4}(2m+1)(2m+3)}}{1-q^{2m+1}}.$$

Je laisse donc de côté ce résultat et d'autres du même genre pour vous indiquer, en terminant, de quelle manière je conçois la liaison de la théorie des fonctions elliptiques, dans ses applications à l'arithmétique, avec vos recherches générales sur les fonctions numériques.

» Je considère pour cela les développements suivant les puissances de q, de $\sin\operatorname{am} z$, $\cos\operatorname{am} z$, $\Delta\operatorname{am} z$, et je remarque qu'en posant

$$\frac{k\mathrm{K}}{2\pi}\sin\operatorname{am} z = \sum \mathrm{R}_n q^{\frac{1}{2}n},$$

$$\frac{k\mathrm{K}}{2\pi}\cos\operatorname{am} z = \sum (-1)^{\frac{n-1}{2}} \mathrm{S}_n q^{\frac{1}{2}n},$$

$$\frac{\mathrm{K}}{2\pi}\Delta\operatorname{am} z = 1 + \sum \mathrm{T}_n q^n,$$

on a

$$\mathrm{R}_n = \sum \sin dx,$$

$$\mathrm{S}_n = \sum (-1)^{\frac{d-1}{2}} \cos dx,$$

les sommes s'étendant à tous les diviseurs d du nombre impair n; et à l'égard de la fonction T, si l'on pose $n = 2^\nu \mathrm{N}$, N étant impair, et qu'on désigne par d les diviseurs de N, on aura semblablement

$$\mathrm{T}_n = \sum (-1)^{\frac{\mathrm{N}-d}{2}} \cos 2^{\nu+1} dx.$$

On retrouve donc ainsi les fonctions numériques qui se sont si souvent présentées dans vos recherches.

» Soit encore

$$\sqrt{\frac{\mathrm{K}}{2\pi}}\,\frac{\mathrm{H}(z)\Theta_1(z)}{\Theta(z)} = \sum \mathrm{U}_n q^{\frac{1}{4}n},$$

$$\sqrt{\frac{k'\mathrm{K}}{2\pi}}\,\frac{\mathrm{H}_1(z)\Theta_1(z)}{\Theta(z)} = \sum \mathrm{V}_n q^{\frac{1}{4}n},$$

$$\sqrt{\frac{k\mathrm{K}}{2\pi}}\,\frac{\mathrm{H}(z)\mathrm{H}_1(z)}{\Theta(z)} = \sum \mathrm{W}_n q^{\frac{1}{4}n},$$

et désignons par d et d' deux diviseurs conjugués, dont le produit soit n, on aura

$$\mathrm{U}_n = \frac{1}{2}\sum \sin\frac{d+d'}{2}x, \quad \mathrm{V}_n = \frac{1}{2}\sum (-1)^{\frac{d+1}{2}} \cos\frac{d+d'}{2}x,$$

les sommes s'étendant à tous les diviseurs du nombre n qui est $\equiv 1$ mod 4, et en dernier lieu

$$W_n = \sum \sin \frac{d+d'}{2} x,$$

n étant $\equiv -1$ mod. 4. On reconnaît ainsi, au point de vue arithmétique, l'analogie des nouvelles fonctions avec les anciennes, et en même temps leur différence qui consiste en ce qu'un diviseur d est remplacé par $\frac{d+d'}{2}$. On ne voit point encore d'ailleurs s'offrir de parties de fonctions, mais elles se présentent en faisant

$$Z(x) = \sum \zeta_n q^{\frac{1}{4}n}.$$

Dans ce cas n est $\equiv -1$ mod. 4, et en supposant $d < d'$ on trouve

$$\zeta_n = 2 \sum (-1)^{\frac{d+1}{2}} \cos \frac{d+d'}{2} x,$$

la somme ne comprenant que les diviseurs d, qui sont inférieurs à $\sqrt{n}$.

» J'espère, mon cher confrère, que vous n'oublierez pas m'avoir aussi promis une Lettre arithmétique qui soulève un peu le voile dont vous vous êtes jusqu'à présent recouvert. Si vous le jugez à propos, j'aimerais bien que celle-ci fût publiée dans votre Journal, où je la ferai suivre de plusieurs articles sur divers sujets qui s'y rattachent et qu'en ce moment je suis obligé d'ajourner. »

RÉPONSE DE M. LIOUVILLE.

« Je vous remercie de votre bonne Lettre, et je vous répondrai longuement dans le *Journal de Mathématiques*, où l'on ne manquera pas de reproduire vos intéressants résultats. Nous tendons à un but semblable, mais par des voies bien différentes, qui pourtant se rattachent toujours aux travaux de Jacobi. En effet mes *formules générales*, ainsi que je l'ai indiqué au commencement de mon septième article (*Journal de Mathématiques*, cahier d'avril 1858), donnent naissance à des équations entre des séries qui contiennent comme cas particuliers celles de la théorie des fonctions elliptiques. Cette théorie (que vous employez directement) se trouve donc ici remplacée pour moi par des formules appartenant à l'algèbre la plus élémentaire, obtenues au moyen de certaines identités des plus simples, et renfermant des fonctions arbitraires sans aucune condition de continuité. Les variables que je considère sont en effet des nombres entiers, et les fonctions n'ont besoin d'être définies que par rapport à ces nombres entiers pris comme valeurs des variables : le reste est à volonté. Je ne puis dès lors avoir aucune peine à introduire dans mes recherches les fonctions numériques que vous nommez incomplètes. Permettez-moi de vous rappeler que je vous ai donné à ce sujet, il y a longtemps déjà, un exemple remarquable. Prenez dans mon premier article (*Journal de Mathématiques*, cahier d'avril 1858) la formule

$$\Sigma[f(d'-d'')-f(d'+d'')]=\Sigma d[f(0)-f(2d)],$$

qui se rapporte au mode de partition du double d'un entier donné ($m=d\delta$) marqué par la formule

$$2m=d'\delta'+d''\delta'',$$

où d', δ', d'', δ'' sont comme d et δ des entiers impairs positifs. La fonction $f(x)$ doit être paire. Cette condition sera remplie si nous supposons $f(x)$ nulle quand x atteint ou dépasse une valeur numérique donnée a, c'est-à-dire quand $x^2 \geqq a^2$, et $f(x)$ égale à 1 quand $x^2 < a^2$. Or vous en conclurez de suite pour la fonction numérique exprimant la somme des diviseurs de m qui ne sont pas inférieurs à

$\frac{a}{2}$ cette propriété curieuse d'exprimer aussi le nombre des solutions de l'équation $2m = d'\delta' + d''\delta''$ pour lesquelles on a numériquement

$$d' - d'' < a, \quad d' + d'' \geqq a.$$

» En prenant $a = 2\sqrt{m}$, la fonction numérique dont je viens de parler deviendra une des fonctions de M. Kronecker. Vous obtiendrez d'autres résultats dignes d'attention en prenant $f(x) = 0$, sauf dans les cas où l'entier x est $\equiv \pm a (\text{mod. } p)$, a et p étant des nombres donnés : on fera alors $f(x) = 1$. Des remarques analogues s'appliquent à toutes mes formules générales.

» C'est en 1857 que j'ai trouvé ces formules. Depuis cette époque, accablé d'occupations et sans cesse dérangé dans un travail qui demande une tête libre, je n'y ai pour ainsi dire rien ajouté. Les douze articles que j'ai publiés ne contiennent pas la moitié de ce que je savais il y a quatre ans ; et encore je mets de côté les applications particulières qui s'offrent en foule, mais qui ne peuvent avoir tout leur prix que par le choix qu'on en fait et par l'ordre qu'on y établit. Permettez-moi donc de transcrire ici deux formules nouvelles, que je tire de mes papiers à cause du rapport qu'elles ont avec quelques-unes de vos transformations analytiques.

» 1° Soit m un entier impair donné. Posons de toutes les manières possibles, en nombres entiers,

$$m = 2m'^2 + d''\delta'',$$

puis

$$2m = m_1^2 + d_2\delta_2,$$

en prenant d'', δ'', d_2, δ_2 impairs et positifs, m_1 impair positif ou négatif, m' indifféremment pair ou impair, positif, nul ou négatif. Si la fonction $\mathfrak{F}(x, y, z)$ remplit, pour toutes les valeurs de x, y, z à employer, les conditions suivantes :

$$\mathfrak{F}(-x, y, z) = -\mathfrak{F}(x, y, z), \quad \mathfrak{F}(x, -y, -z) = \mathfrak{F}(x, y, z),$$

on aura

$$2\sum \mathfrak{F}(d'' + 2m', \delta'' - 2m', 2m' + d'' - \delta'') = \sum \mathfrak{F}\left(\frac{d_2 + \delta_2}{2}, m_1, \frac{d_2 - \delta_2}{2}\right).$$

Je vous engage à prendre pour exemple

$$\mathcal{F}(x, y, z) = \sin(xt),$$

t désignant une constante arbitraire.

» 2° Soit m un entier impair donné, de la forme $4g + 3$. Posons de toutes les manières possibles, en nombres entiers,

$$m = m_1^2 + 2d_2\delta_2,$$

puis

$$m = 4m'^2 + d''\delta'',$$

où d_2, δ_2, d'', δ'' sont impairs et positifs, $d'' < \delta''$, m_1 impair positif ou négatif, enfin m' indifféremment pair ou impair, positif, nul ou négatif. Si la fonction $\mathcal{F}(x, y, z)$ est paire en x et en y, mais impaire en z, on aura

$$\sum \mathcal{F}(d_2 - m_1,\ \delta_2 + m_1 - d_2,\ m_1)$$
$$= \sum \mathcal{F}\left(2m', \frac{\delta'' - d''}{2}, d'' + 2m'\right) - \sum \mathcal{F}\left(\frac{\delta'' + d''}{2}, \frac{\delta'' - d''}{2}, d'' + 2m'\right).$$

» Ici vous voyez figurer explicitement la condition $d'' < \delta''$. On n'a mis partout qu'un signe sommatoire, quoiqu'il s'agisse de sommes multiples : cela ne vous arrêtera pas. Je terminerai par un théorème (que vos formules donnent aussi) concernant la fonction numérique $\rho'(n)$, qui marque l'excès du nombre des diviseurs de n de la forme $4\mu + 1$ sur celui des diviseurs de la forme $4\mu + 3$, en se bornant aux diviseurs moindres que $\sqrt{n}$, tandis que je représente cet excès par $\rho(n)$ quand on considère tous les diviseurs. Soit m un nombre entier donné, de la forme $8r + 3$. D'après la propriété connue de $\rho(n)$, relativement à la décomposition d'un nombre en deux carrés, il est clair que

$$\rho\left(\frac{m - 1^2}{2}\right) + \rho\left(\frac{m - 3^2}{2}\right) + \ldots$$

est le nombre des solutions de l'équation

$$m = i^2 + i'^2 + i''^2,$$

où i, i', i'' sont impairs et positifs. Or je trouve que ce nombre s'ex-

prime aussi au moyen de $\rho'(n)$, par

$$\rho'(m) + 2\rho'(m - 4.1^2) + 2\rho'(m - 4.2^2) + \ldots.$$

Mais en voilà assez pour le moment. Je suis, comme vous, dans les examens; et d'ailleurs votre Lettre est déjà un peu longue pour les *Comptes rendus :* je dois me restreindre et vous laisser prendre toute la place que votre travail mérite. »

NOTE DE M. LIOUVILLE.

En reproduisant dans le Journal de Mathématiques ces deux Lettres extraites des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (séance du 5 août 1861), je me bornerai à ajouter quelques remarques, remettant à une autre époque les longs développements dans lesquels j'aurai à entrer et qui, si Dieu m'accorde le temps nécessaire, contribueront, je crois, aux progrès de la science des nombres.

On pense bien qu'après avoir reçu la Lettre de M. Hermite, j'ai profité des premiers moments dont j'ai pu disposer pour rechercher dans les Notes que j'ai accumulées en 1857, sans qu'il m'ait été donné depuis de reprendre en liberté mon travail, ce qu'il pouvait y avoir d'analogue à la savante analyse de mon ingénieux confrère. En effet, mes formules se rattachent aussi à la théorie des fonctions elliptiques : seulement elles contiennent plutôt cette théorie qu'elles n'en dépendent. Je les démontre toutes à priori fort simplement; mais on n'a pas non plus de peine à y arriver au moyen des fonctions elliptiques. Il y a là un genre de traduction que l'habitude rend facile. Je devais donc avoir obtenu des résultats semblables à ceux que M. Hermite tire de ses calculs, et peut-être ces résultats mêmes, sous une expression différente. Une seule chose, en réalité, m'avait manqué, c'était de reconnaître la liaison qui existe entre des nombres de formes quadratiques binaires et des nombres de solutions de certaines équations qui s'étaient présentées à moi. L'interprétation que M. Hermite donne de l'équation

$$N = (2n + 1)(2n + 4b + 3) - 4a^2,$$

m'a subitement éclairé. J'avais rencontré autrefois cette même équation écrite ainsi :

$$N = d_1\delta_1 + (d_1 + \delta_1)\delta_2,$$

N désignant un entier donné $4g + 3$, et d_1, δ_1, δ_2 des entiers impairs positifs, soumis à cette restriction que la somme $d_1 + \delta_1$ soit impairement paire [*]. Mais ce n'est que par le travail de M. Hermite que j'ai su que le nombre des solutions de cette équation est précisément le nombre des formes de déterminant $-N$ dont un au moins des coefficients extrêmes est impair. Le reste était d'avance dans mes Notes, et l'analyse de M. Hermite, à partir de là, ne m'a rien appris. J'ajoute que maintenant aucun des théorèmes de M. Kronecker n'échappe à mes démonstrations.

Prenons comme exemple un de ceux que M. Hermite a pour le moment laissés de côté, ou plutôt une combinaison de deux de ceux-là, concernant la somme des nombres de formes à déterminants négatifs ayant pour valeurs absolues $2m - 1^2$, $2m - 3^2$, $2m - 5^2, \ldots$, où m est un entier impair : on ne compte pas les formes dont les coefficients extrêmes sont tous les deux pairs. M. Kronecker trouve cette somme égale à

$$\frac{1}{2}[\zeta_1(m) + \rho(m)],$$

$\zeta_1(m)$ représentant la somme des diviseurs de m et $\rho(m)$ l'excès du nombre des diviseurs de m qui sont $\equiv 1 \pmod{4}$ sur le nombre de ceux $\equiv 3 \pmod{4}$. Or, pour moi, ce théorème restait caché, quoique je l'eusse trouvé pour ainsi dire, parce qu'au lieu de me rattacher aux formes quadratiques, je considérais le nombre des solutions d'une équation de la forme

$$p = d_2\delta_2 + 2^{\alpha_3}(d_2 + \delta_2)\delta_3,$$

où le premier membre est un entier $4\mu + 1$ et où d_2, δ_2, δ_3 sont des entiers impairs et positifs : on suppose $\alpha_3 > 0$, ou autrement dit la somme $d_2 + \delta_2$ impairement paire. Je prenais $p = 2m - m_1^2$, m impair

[*] D'après les valeurs admises pour n, b et a, on passe d'une équation à l'autre, en égalant d_1, δ_1, δ_2 à $2n + 1 + 2a$, $2n + 1 - 2a$, $2b + 1$, respectivement.

donné, $m_1 = 1, 3, 5, \ldots$, comme dans le théorème de M. Kronecker; et c'est au nombre total des solutions des équations successives comprises sous le type général dont il vient d'être question que mes recherches s'appliquaient. Mais ce n'est qu'en imitant le mode de discussion de M. Hermite que j'ai reconnu que le nombre des solutions de chaque équation particulière

$$p = d_2\delta_2 + 2^{\alpha_3}(d_2 + \delta_2)\delta_3,$$

devient le nombre des formes de déterminant $-p$ (dont un au moins des coefficients extrêmes est impair) quand on y ajoute la moitié du nombre des diviseurs de p, augmenté d'une unité quand p est un carré. Alors mon théorème s'est changé en celui de M. Kronecker.

Un mot sur les formules dont j'ai eu à me servir ici. Soit $F(x)$ une fonction impaire, en sorte que $F(-x) = -F(x)$, $F(0) = 0$. Prenons un nombre impair M et soumettons-le aux deux modes de partition indiqués par les équations

$$M = 2M'^2 + D''\Delta'', \quad 2M = M_1^2 + D_2\Delta_2,$$

où M_1, D_2, Δ_2, D'', Δ'' sont des entiers impairs positifs, tandis que M' est indifféremment pâir ou impair, positif, nul ou négatif. On a

$$\sum F(D'' + 2M') = \sum F\left(\frac{D_2 + \Delta_2}{2}\right).$$

Cette équation est comprise comme cas très-particulier dans la première des deux équations nouvelles que j'ai données dans ma réponse à M. Hermite, et même déjà dans mes *formules générales* (onzième article). Elle me sert doublement dans la circonstance actuelle. D'une part j'en tire un lemme très-utile en y supposant $F(x) = 1$ pour $x > 0$, par suite $F(x) = -1$ pour $x < 0$. D'un autre côté, en la combinant avec la formule (D) de mon troisième article (cahier de juin 1858), j'arrive à une autre formule importante. Soit m un entier impair donné. Soumettons-le aux deux modes de partition indiqués par les équations

$$m = 2m'^2 + d''\delta''$$

et

$$2m = m_1^2 + d_2\delta_2 + 2^{\alpha_3+1}d_3\delta_3,$$

où les entiers m_1, d_2, δ_2, d_3, δ_3 sont impairs et positifs, tandis que m' est indifféremment positif, nul ou négatif : on suppose $\alpha_3 > 0$, c'est-à-dire la somme $d_2 + \delta_2$ impairement paire. Si la fonction $f(x)$ est paire, en sorte que $f(-x) = f(x)$, la somme

$$\sum [d'' f(2m') - f(2m') - 2f(2m'+2) - \ldots - 2f(2m' + \delta'' - 1)],$$

qui se rapporte au premier mode de partition, vaudra toujours le double de la somme

$$\sum \left[f\left(\frac{d_2+\delta_2}{2} - d_3\right) - f\left(\frac{d_2+\delta_2}{2} + d_3\right) \right],$$

qui appartient au second mode. Il faudra maintenant prendre $f(0) = 1$, et $f(x) = 0$ pour x différent de 0. Alors il n'y aura plus à considérer que les valeurs de d_3 pour lesquelles

$$d_3 = \frac{d_2+\delta_2}{2},$$

en sorte que l'équation

$$2m = m_1^2 + d_2\delta_2 + 2^{\alpha_3+1} d_3 \delta_3$$

deviendra

$$2m - m_1^2 = d_2\delta_2 + 2^{\alpha_3}(d_2+\delta_2)\delta_3,$$

où l'on reconnaît une équation dont on a parlé plus haut. L'égalité obtenue par notre hypothèse sur $f(x)$, jointe au lemme préliminaire, donne notre théorème; et nous savons à présent, grâce à M. Hermite, y voir le théorème de M. Kronecker.

Dans les équations de *partition* écrites plus haut, mettez $2^{\alpha} m$ au lieu de m, $2^{\alpha''} d''$ au lieu de d'', α et α'' étant > 0, faites $\alpha_3 = 0$, conservez d'ailleurs les autres notations et continuez à exiger que la somme $d_2 + \delta_2$ soit impairement paire; mais à la formule (D) de mon troisième article substituez la formule (a) du second. Vous obtiendrez l'équation que voici :

$$\sum \left[f\left(\frac{d_2+\delta_2}{2} - d_3\right) - f\left(\frac{d_2+\delta_2}{2} + d_3\right) \right]$$
$$= \sum 2^{\alpha''-1} d'' [f(2m') - f(2^{\alpha''} d'' + 2m')];$$

et en y prenant encore $f(0) = 1$, avec $f(x) = 0$ quand x diffère de zéro, vous serez conduits à un des théorèmes démontrés par M. Hermite, sans avoir besoin cette fois d'un lemme préliminaire.

Les théorèmes de M. Kronecker sont donc susceptibles d'une démonstration très-simple. Seulement ils supposent une certaine étude de la théorie des formes quadratiques que je n'avais pas faite et que mes théorèmes (tels que je les avais d'abord) n'exigent pas absolument, même quand on les applique aux décompositions d'un entier en trois carrés. Les théorèmes de ce genre se multiplieront beaucoup, et dès à présent nous pourrions en augmenter le nombre. L'échelle des déterminants successifs qui dans le premier exemple ci-dessus était $2m - m_1^2$ et dans le second $2^{\alpha+1} m - m_1^2$, peut être prise par exemple $n - 3s^2$ ou $n - 5s^2$ avec diverses hypothèses sur l'entier fixe n et sur l'entier variable s. Mais cela mérite d'être approfondi.

Je le répète en terminant, on pourra tirer, si on le veut, de la théorie des fonctions elliptiques mes formules fondamentales, très-facilement surtout celles qui dépendent de fonctions d'une seule variable. Il suffit d'observer qu'avec une somme de produits de constantes par des cosinus d'arcs proportionnels à x, on forme nos fonctions paires de x, comme nos fonctions impaires avec des sinus. Le but que je me suis proposé est tout autre. Je veux pour mes formules une démonstration fondée uniquement sur les premiers principes de l'algèbre. Les fonctions elliptiques ne sont ici pour moi qu'un accessoire. Mais si je me rattache moins que M. Hermite aux *Fundamenta nova*, Jacobi reste pourtant mon principal guide. C'est dans sa démonstration arithmétique (admirablement présentée par Dirichlet dans le cahier de mai 1856) pour le nombre des représentations du quadruple d'un entier impair par une somme de quatre carrés impairs, que j'ai puisé mes premières idées.

DE

L'INTÉGRABILITÉ DES FONCTIONS DIFFÉRENTIELLES D'UN ORDRE SUPÉRIEUR AU PREMIER;

PAR MM. STOFFEL ET BACH.

---

1. On sait que la variation de l'intégrale définie

$$\int_{x_0}^{x} f(x, y, y', y'', \ldots)\, dx,$$

dans laquelle y', y'', etc., sont les dérivées des différents ordres de y considérée comme fonction de x, se décompose en deux parties, l'une dépendant essentiellement des variations aux limites, l'autre dépendant des variations entre les limites.

Cette décomposition, ainsi que l'ont montré depuis longtemps Euler et Lagrange, permet de trouver d'une manière aussi simple qu'élégante la condition d'intégrabilité d'une expression de la forme

$$f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)})\, dx,$$

contenant x, y et ses dérivées jusqu'à celles de l'ordre n inclusivement.

Nous allons, pour entrer en matière, établir d'abord cette condition d'intégrabilité, en reproduisant à peu de chose près le raisonnement d'Euler.

2. Dire que l'expression ci-dessus est intégrable, c'est dire que son intégrale peut être trouvée indépendamment de la relation arbitraire qu'il faut en général supposer entre y et x pour rendre l'intégration possible par une quadrature, ou que l'on a, en d'autres

termes

$$\int_{x_0}^{x} f(x, y, y', \ldots, y^{(n)})\, \mathrm{d}x$$

$$= \mathrm{F}(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) - \mathrm{F}(x_0, y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(n-1)}).$$

Posons

$$f(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = \mathrm{V}$$

et

$$\mathrm{d}\mathrm{V} = \mathrm{X}\,\mathrm{d}x + \mathrm{Y}\,\mathrm{d}y + \mathrm{Y}'\,\mathrm{d}y' + \ldots + \mathrm{Y}^{n}\,\mathrm{d}y^{(n)},$$

expression dans laquelle

$$\mathrm{X} = \frac{d\mathrm{V}}{dx}, \quad \mathrm{Y} = \frac{d\mathrm{V}}{dx}, \quad \mathrm{Y}' = \frac{d\mathrm{V}}{dy'}, \ldots, \quad \mathrm{Y}^{(n)} = \frac{d\mathrm{V}}{dy^{(n)}},$$

en désignant les différentielles partielles par la lettre d, et réservant le caractère d pour indiquer les différentielles totales.

Écrivons ensuite la formule connue de la variation d'une intégrale définie; elle est, en supposant que y et ses dérivées, jusqu'à celle de l'ordre $n-1$ inclusivement, gardent la même valeur pour $x = x_0$,

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}
\delta\int_{x_0}^{x} \mathrm{V}\,\mathrm{d}x = {} & \mathrm{Y}^{(n)}\,\delta y^{(n-1)} + \left(\mathrm{Y}^{(n-1)} - \frac{\mathrm{d}\mathrm{Y}^{(n)}}{\mathrm{d}x}\right)\delta y^{(n-2)} \\
& + \left(\mathrm{Y}^{(n-2)} - \frac{\mathrm{d}\mathrm{Y}^{(n-1)}}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}^2\mathrm{Y}^{(n)}}{\mathrm{d}x^2}\right)\delta y^{(n-3)} + \ldots \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + \left(\mathrm{Y}' - \frac{\mathrm{d}\mathrm{Y}''}{\mathrm{d}x} + \ldots \pm \frac{\mathrm{d}^{n-1}\mathrm{Y}^{(n)}}{\mathrm{d}x^{n-1}}\right)\delta y \\
& + \Big[\mathrm{V} - \left(\mathrm{Y}' - \frac{\mathrm{d}\mathrm{Y}''}{\mathrm{d}x} - \ldots\right) y' \\
& \qquad - \left(\mathrm{Y}'' - \frac{\mathrm{d}\mathrm{Y}'''}{\mathrm{d}x} + \ldots\right) y'' - \ldots - \mathrm{Y}^{(n)} y^{(n)}\Big]\delta x \\
& + \int_{x_0}^{x}\left(\mathrm{Y} - \frac{\mathrm{d}\mathrm{Y}'}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}^2\mathrm{Y}''}{\mathrm{d}x^2} - \ldots \pm \frac{\mathrm{d}^n\mathrm{Y}^{(n)}}{\mathrm{d}x^n}\right)\omega\,dx
\end{aligned}\right.$$

Mais si l'on a

$$\int_{x_0}^{x} \mathrm{V}\,\mathrm{d}x = \mathrm{F}(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) - \mathrm{F}(x_0, y_0, \ldots, y_0^{(n-1)}),$$

la variation du second membre, d'après nos hypothèses, dépendra uniquement des variations à la limite supérieure, et il devra en être de même de celle de $\int_{x_0}^{x} \mathrm{V}\,\mathrm{d}x$. Puisque d'ailleurs cette variation contient

$$\int_{x_0}^{x} \left(\mathrm{Y} - \frac{\mathrm{d}\,\mathrm{Y}'}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}^2\,\mathrm{Y}''}{\mathrm{d}x^2} + \ldots\right) \omega\,\mathrm{d}\,x,$$

intégrale qui dépend évidemment des variations entre les limites, il faudra que par la nature de la fonction V cette intégrale soit identiquement nulle, ou que l'on ait

$$(2) \qquad \mathrm{Y} - \frac{\mathrm{d}\,\mathrm{Y}'}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}^2\,\mathrm{Y}''}{\mathrm{d}x^2} + \ldots = 0.$$

Euler démontre aussi que l'équation (2) étant identiquement vérifiée, la fonction $\mathrm{V}\,\mathrm{d}x$ est intégrable. Sa démonstration a été modifiée avec avantage par M. Bertrand, dans un Mémoire inséré au XXVIII[e] cahier du *Journal de l'École Polytechnique*. On trouve aux pages 255 et 265 de ce même Mémoire des méthodes d'une application facile pour arriver à l'intégrale.

Bien que cette question de l'intégrabilité des fonctions différentielles ait eu le privilége d'attirer l'attention des géomètres les plus éminents, il ne nous a pas semblé hors de propos de traiter le sujet à un point de vue dont il est à peine fait mention dans les ouvrages et Mémoires que nous avons pu consulter, et de faire voir qu'*en partant de l'équation de condition et en s'appuyant sur des considérations uniquement tirées du calcul différentiel, on peut mettre* $\mathrm{V}\,\mathrm{d}x$ *sous la forme d'une fonction différentielle du premier ordre renfermant* $x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}$ *considerées comme variables indépendantes et satisfaisant aux conditions d'intégrabilité bien connues de ces fonctions.*

Cette forme, à laquelle on est naturellement conduit en ayant égard à l'équation (2) et en changeant dans la formule (1) les δ en d, permet de trouver immédiatement l'intégrale par des quadratures.

5. Écrivons

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{V}\,\mathrm{d}x = {} & \mathrm{Y}^{(n)}\,\mathrm{d}y^{(n-1)} + \left(\mathrm{Y}^{(n-1)} - \frac{\mathrm{d}\,\mathrm{Y}^{(n)}}{\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}y^{(n-2)} \\ & + \left(\mathrm{Y}^{(n-2)} - \frac{\mathrm{d}\,\mathrm{Y}^{(n-1)}}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}^2\,\mathrm{Y}^{(n)}}{\mathrm{d}x^2}\right)\mathrm{d}y^{n-3} + \ldots \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \left(\mathrm{Y}' - \frac{\mathrm{d}\,\mathrm{Y}''}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}^2\,\mathrm{Y}''}{\mathrm{d}x^2} - \ldots\right)\mathrm{d}y \\ & + \left[\mathrm{V} - \left(\mathrm{Y}' - \frac{\mathrm{d}\,\mathrm{Y}''}{\mathrm{d}x} + \ldots\right)y' - \left(\mathrm{Y}'' - \frac{\mathrm{d}\,\mathrm{Y}''}{\mathrm{d}x} + \ldots\right)y'' - \ldots \right. \\ & \left. \qquad - \mathrm{Y}^{(n)}\,y^{(n)}\right]\mathrm{d}x, \end{aligned}\right.$$

ce qui d'ailleurs est une identité, en ayant égard aux relations

$$\mathrm{d}y = y'\,\mathrm{d}x,\quad \mathrm{d}y' = y''\,\mathrm{d}x, \ldots,\quad \mathrm{d}y^{(n-1)} = y^{(n)}\,\mathrm{d}x.$$

Pour faire voir que, l'équation (2) étant satisfaite, $\mathrm{V}\,dx$ mis sous cette forme est la différentielle du premier ordre d'une fonction de x, $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$ considérées comme variables indépendantes, prouvons d'abord que *les coefficients de* $\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}y', \ldots, \mathrm{d}y^{(n-1)}$ *dans cette expression ne contiennent pas de dérivées de* y *d'un ordre supérieur à* $n-1$.

Écrivons à cet effet l'équation (2) sous la forme

$$\mathrm{Y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\mathrm{Y}' - \frac{\mathrm{d}\,\mathrm{Y}''}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}^2\,\mathrm{Y}'''}{\mathrm{d}x^2} - \ldots\right) = 0,$$

et faisons observer que Y étant une dérivée partielle de la fonction V, y n'y entrera pas avec un indice supérieur à n; donc, puisque l'équation (2) a lieu identiquement,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\mathrm{Y}' - \frac{\mathrm{d}\,\mathrm{Y}''}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}^2\,\mathrm{Y}'''}{\mathrm{d}x^2} - \ldots\right)$$

ne devra pas non plus contenir $y^{(n+1)}$, $y^{(n+2)}, \ldots$, et comme la différentiation totale augmente d'une unité l'indice des y,

$$\mathrm{Y}' - \frac{\mathrm{d}\,\mathrm{Y}''}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}^2\,\mathrm{Y}'''}{\mathrm{d}x^2} - \ldots$$

ne devra pas renfermer y avec un indice supérieur à $n-1$.

Mettons actuellement l'équation (2) sous la forme

$$Y - \frac{dY'}{dx} + \frac{d^2}{dx^2}\left(Y'' - \frac{dY'''}{dx} + \ldots\right) = 0,$$

et faisons observer que $Y - \frac{dY'}{dx}$ ne pouvant contenir y avec un indice supérieur à $n+1$, il doit en être de même pour

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(Y'' - \frac{dY'''}{dx} + \ldots\right);$$

mais deux différentiations totales augmentent de deux unités l'indice des y, donc

$$Y'' - \frac{dY'''}{dx} + \frac{d^2 Y^{\text{IV}}}{dx^2} - \ldots$$

ne saurait contenir y avec un indice supérieur à $n-1$.

En poursuivant le même raisonnement, on arrivera jusqu'à $Y^{(n)}$ qui ne pourra non plus contenir y avec un indice supérieur à $n-1$, car si la fonction V provient d'une différentiation totale effectuée en regardant $y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$ comme des fonctions de x, elle est nécessairement linéaire en $y^{(n)}$, et dès lors sa dérivée partielle par rapport à $y^{(n)}$ ne renferme pas cette variable. Rien d'ailleurs ne s'oppose à ce que l'on étende jusqu'à $Y^{(n)}$ le raisonnement employé plus haut. Quant au coefficient de dx, il ne contiendra pas non plus $y^{(n)}$, car le terme de V où entre cette variable, n'est autre que $Y^{(n)}y^{(n)}$.

Après avoir montré que l'expression contenue dans le second membre de l'équation (3) *ne renferme pas les dérivées de y d'un ordre supérieur à $n-1$*, il nous reste à faire voir qu'*elle satisfait aux conditions connues nécessaires et suffisantes pour l'intégrabilité des différentielles du premier ordre.*

Mais avant cela établissons une formule dont nous ferons un usage continuel dans tout ce qui va suivre.

4. Cette formule est la suivante

$$(4) \qquad \frac{d}{dy^{(p)}} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{d\,.}{dx} \cdot \frac{du}{dy^{(p)}} + \frac{du}{dy^{(p-1)}},$$

dans laquelle u est une certaine fonction de $x, y, y', \ldots, y^{(p)}$, etc. Pour y arriver, différentions totalement la fonction u, et nous aurons

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{du}{dx} + \frac{du}{dy} y' + \frac{du}{dy'} y'' + \ldots + \frac{du}{dy^{(p-1)}} y^{(p)} + \ldots,$$

puis différentions partiellement par rapport à $y^{(p)}$,

$$\frac{d}{dy^{(p)}} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{d^2 u}{dx\, dy^{(p)}} + \frac{d^2 u}{dy\, dy^{(p)}} y' + \frac{d^2 u}{dy'\, dy^{(p)}} y'' + \ldots$$
$$+ \frac{d^2 u}{dy^{(p-1)}\, dy^{(p)}} y^{(p)} + \ldots + \frac{du}{dy^{(p-1)}}.$$

Mais l'ensemble des termes du second membre, à l'exception du dernier, est précisément la différentielle totale de $\frac{du}{dy^{(p)}}$; on a donc

$$\frac{d}{dy^{(p)}} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \cdot \frac{du}{dy^{(p)}} + \frac{du}{dy^{(p-1)}},$$

ce qui est la formule (4).

Nous ne ferons usage que de cette formule, mais il est facile de voir que l'on a en général

$$\frac{d}{dy^{(p)}} \frac{\mathrm{d}^m u}{\mathrm{d}x^m} = \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m} \cdot \frac{du}{dy^{(p)}} + C_1 \frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}x^{m-1}} \cdot \frac{du}{dy^{(p-1)}} + C_2 \frac{\mathrm{d}^{m-2}}{\mathrm{d}x^{m-2}} \frac{du}{dy^{(p-2)}} + \ldots$$
$$+ C_1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \cdot \frac{du}{dy^{(p-m+1)}} + \frac{du}{dy^{(p-m)}},$$

1, C_1, C_2, etc., étant les coefficients de la puissance $m^{\text{ième}}$ du binôme. Il est bien entendu que l'on devra remplacer, s'il y a lieu, $y^{(0)}$ par y et supprimer tous les termes qui suivent.

5. Revenons à notre sujet et comparons d'abord le premier terme de l'expression (3) avec tous les suivants. Il s'agit de prouver que l'on a

$$\frac{d\mathrm{Y}^{(n)}}{dy^{(n-i-1)}} = \frac{d}{dy^{(n-i)}} \left(\mathrm{Y}^{(n-i)} - \frac{\mathrm{d}\mathrm{Y}^{(n-i+1)}}{\mathrm{d}x} + \ldots \right).$$

Pour cela, différentions par rapport à $y^{(n)}$ le coefficient qui suit im-

médiatement celui que nous considérons, et d'après ce qui a été dit (n° **3**) nous pouvons écrire

$$\frac{d}{dy^{(n)}}\left(\mathrm{Y}^{(n-i-1)} - \frac{\mathrm{d}\,\mathrm{Y}^{(n-i)}}{\mathrm{d}x} + \ldots\right) = 0,$$

ou encore, en vertu de la formule (4),

$$\frac{d\,\mathrm{Y}^{(n-i-1)}}{dy^{(n)}} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{d}{dy^{(n)}}\left(\mathrm{Y}^{(n-i)} - \frac{\mathrm{d}\,\mathrm{Y}^{(n-i+1)}}{\mathrm{d}x} + \ldots\right)$$
$$- \frac{d}{dy^{(n-1)}}\left(\mathrm{Y}^{(n-i)} - \frac{\mathrm{d}\,\mathrm{Y}^{(n-i+1)}}{\mathrm{d}x} + \ldots\right) = 0,$$

ce qui revient à

$$\frac{d\,\mathrm{Y}^{(n)}}{dy^{(n-i-1)}} = \frac{d}{dy^{(n-1)}}\left(\mathrm{Y}^{(n-i)} - \frac{\mathrm{d}\,\mathrm{Y}^{(n-i+1)}}{\mathrm{d}x} + \ldots\right),$$

car

$$\frac{d\,\mathrm{Y}^{(n-i-1)}}{dy^{(n)}} = \frac{d\,\mathrm{Y}^{(n)}}{dy^{(n-i-1)}},$$

et d'ailleurs, en vertu du même n° **3**,

$$\frac{d}{dy^{(n)}}\left(\mathrm{Y}^{(n-i)} - \frac{\mathrm{d}\,\mathrm{Y}^{(n-i+1)}}{\mathrm{d}x} + \ldots\right) = 0.$$

Pour comparer le premier terme avec l'avant-dernier, on différentiera l'équation (2) partiellement par rapport à $y^{(n)}$, et l'on aura

$$\frac{d\,\mathrm{Y}}{dy^{(n)}} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{d}{dy^{(n)}}\left(\mathrm{Y}' - \frac{\mathrm{d}\,\mathrm{Y}''}{\mathrm{d}x} + \ldots\right) - \frac{d}{dy^{(n-1)}}\left(\mathrm{Y}' - \frac{\mathrm{d}\,\mathrm{Y}''}{\mathrm{d}x} + \ldots\right) = 0,$$

ce qui revient, comme on le verra sans peine, à

$$\frac{d\,\mathrm{Y}^{(n)}}{dy} = \frac{d}{dy^{(n-1)}}\left(\mathrm{Y}' - \frac{\mathrm{d}\,\mathrm{Y}''}{\mathrm{d}x} + \ldots\right).$$

C'est précisément l'égalité qu'il s'agissait d'établir.

Il est également facile de comparer tous les termes à l'avant-der-

nier, et de montrer que l'on a

$$\frac{d}{dy^{(n-k-1)}}\left(Y' - \frac{dY''}{dx} + \ldots\right) = \frac{d}{dy}\left(Y^{(n-k)} - \frac{dY^{(n-k+1)}}{dx} + \ldots\right).$$

Supposons que l'égalité des dérivées ait lieu entre l'avant-dernier terme et celui qui précède le terme considéré, lequel commence par $Y^{(n-k+1)}$. Différentions l'équation de condition par rapport à $y^{(n-k)}$, et il viendra

$$\frac{dY}{dy^{(n-k)}} - \frac{d}{dx}\cdot\frac{d}{dy^{(n-k)}}\cdot\left(Y' - \frac{dY''}{dx} + \ldots\right) - \frac{d}{dy^{(n-k-1)}}\left(Y' - \frac{dY''}{dx} + \ldots\right) = 0,$$

ce qui peut, d'après notre hypothèse, s'écrire

$$\frac{dY^{(n-k)}}{dy} - \frac{d}{dx}\cdot\frac{d}{dy}\left(Y^{(n-k+1)} - \ldots\right) = \frac{d}{dy^{(n-k-1)}}\left(Y' - \frac{dY''}{dx} + \ldots\right)$$

ou encore

$$\frac{d}{dy}\left(Y^{(n-k)} - \frac{dY^{(n-k+1)}}{dx} + \ldots\right) = \frac{d}{dy^{(n-k-1)}}\left(Y' - \frac{dY''}{dx} + \ldots\right),$$

et puisqu'on a déjà comparé le premier terme avec l'avant-dernier, l'égalité est générale.

6. Considérons actuellement deux termes quelconques, et prouvons que l'on a

$$\frac{d}{dy^{(n-i-1)}}\left(Y^{(n-k)} - \frac{dY^{(n-k+1)}}{dx} + \ldots\right) = \frac{d}{dy^{(n-k-1)}}\left(Y^{(n-i)} - \frac{dY^{(n-i+1)}}{dx} + \ldots\right).$$

Admettons que l'on ait

$$(5)\quad \frac{d}{dy^{(n-i-1)}}\left(Y^{(n-k+1)} - \frac{dY^{(n-k+2)}}{dx} + \ldots\right) = \frac{d}{dy^{(n-k)}}\left(Y^{(n-i)} - \frac{dY^{(n-i+1)}}{dx} + \ldots\right),$$

ce qui revient à dire que l'égalité des dérivées partielles a été vérifiée pour le terme antérieur à celui qui commence par $Y^{(n-k)}$ comparé avec

tous ceux qui suivent, et posons

$$\frac{d}{dy^{(n-i-1)}}\left(\mathrm{Y}^{(n-k)}-\frac{\mathrm{d}\,\mathrm{Y}^{(n-k+1)}}{\mathrm{d}x}+\ldots\right)$$

$$=\frac{d\mathrm{Y}^{(n-k)}}{dy^{(n-i-1)}}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{d}{dy^{(n-i-1)}}\left(\mathrm{Y}^{(n-k+1)}-\ldots\right)-\frac{d}{dy^{(n-i-2)}}\left(\mathrm{Y}^{(n-k+1)}-\ldots\right),$$

cela peut s'écrire, en vertu de l'équation (5),

$$\frac{d}{dy^{(n-i-1)}}\left(\mathrm{Y}^{(n-k)}-\frac{\mathrm{d}\,\mathrm{Y}^{(n-k+1)}}{\mathrm{d}x}+\ldots\right)$$

$$=\frac{d\mathrm{Y}^{(n-i-1)}}{dy^{(n-k)}}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,\frac{d}{dy^{(n-k)}}\left(\mathrm{Y}^{(n-i)}-\frac{\mathrm{d}\,\mathrm{Y}^{(n-i+1)}}{\mathrm{d}x}+\ldots\right)-\frac{d\mathrm{Y}^{(n-i-1)}}{dy^{(n-k)}}$$

$$+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{d}{dy^{(n-k)}}\left(\mathrm{Y}^{(n-i)}-\ldots\right)+\frac{d}{dy^{(n-k-1)}}\left(\mathrm{Y}^{(n-i)}-\frac{\mathrm{d}\,\mathrm{Y}^{(n-i+1)}}{\mathrm{d}x}+\ldots\right).$$

Effectuant les réductions, on tombe sur la formule qu'il s'agissait de démontrer, savoir

$$(6)\quad \frac{d}{dy^{(n-i-1)}}\left(\mathrm{Y}^{(n-k)}-\frac{\mathrm{d}\,\mathrm{Y}^{(n-k+1)}}{\mathrm{d}x}+\ldots\right)=\frac{d}{dy^{(n-k-1)}}\left(\mathrm{Y}^{(n-i)}-\frac{\mathrm{d}\,\mathrm{Y}^{(n-i+1)}}{\mathrm{d}x}+\ldots\right).$$

Or l'égalité des dérivées partielles ayant été prouvée pour le premier coefficient comparé avec tous les suivants, jusqu'à l'avant-dernier inclusivement, ainsi que pour l'avant-dernier comparé avec tous ceux qui précèdent, on conclura de la formule (6) l'égalité des dérivées pour un coefficient quelconque comparé à tous ceux qui suivent, à l'exception du dernier dont nous n'avons pas encore parlé jusqu'ici.

7. Pour faire enfin la comparaison d'un terme quelconque avec le dernier, il faut démontrer l'égalité suivante :

$$\frac{d}{dx}\left(\mathrm{Y}^{(n-i)}-\frac{\mathrm{d}\,\mathrm{Y}^{(n-i+1)}}{\mathrm{d}x}+\ldots\right)$$

$$=\frac{d}{dy^{(n-i-1)}}\left[\mathrm{V}-\left(\mathrm{Y}'-\frac{\mathrm{d}\,\mathrm{Y}''}{\mathrm{d}x}+\ldots\right)y'-\left(\mathrm{Y}''-\frac{\mathrm{d}\,\mathrm{Y}'''}{\mathrm{d}x}+\ldots\right)y''-\ldots-\mathrm{Y}^{(n)}y^{(n)}\right].$$

Posons, pour simplifier l'écriture,

$$Y^{(n-i)} - \frac{\mathrm{d}\,Y^{(n-i+1)}}{\mathrm{d}x} + \ldots = U.$$

En vertu des relations établies plus haut, l'égalité qu'il s'agit de vérifier devient

$$\begin{aligned}\frac{dU}{dx} = \frac{dV}{dy^{(n-i-1)}} - \frac{dU}{dy}y' - \frac{dU}{dy'}y'' - \ldots \\ - \frac{dU}{dy^{(n-1)}}y^{(n)} - \left(Y^{(n-i-1)} - \frac{\mathrm{d}\,Y^{(n-i)}}{\mathrm{d}x} + \ldots\right) \\ = Y^{(n-i-1)} - \frac{dU}{dy}y' - \frac{dU}{dy'}y'' - \ldots - \frac{dU}{dy^{(n-1)}}y^{(n)} - Y^{(n-i-1)} + \frac{dU}{dx}.\end{aligned}$$

Réduisant et groupant convenablement les termes, nous trouvons

$$\frac{\mathrm{d}\,U}{\mathrm{d}x} = \frac{dU}{dx} + \frac{dU}{dy}y' + \frac{dU}{dy'}y'' + \ldots + \frac{dU}{dy^{(n-1)}}y^{(n)},$$

ce qui est une identité.

Ainsi se trouve établi très-simplement que $V dx$ peut être mis sous la forme d'une différentielle du premier ordre quand l'équation

$$Y - \frac{\mathrm{d}\,Y'}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}^2\,Y''}{\mathrm{d}x^2} - \ldots = 0$$

est identiquement vérifiée; et en intégrant cette fonction du premier ordre par les procédés connus, on arrive à l'intégrale demandée.

Il est facile actuellement d'écrire l'intégrale de la fonction différentielle donnée. En posant, pour abréger,

$$\begin{aligned}Y' - \frac{\mathrm{d}\,Y''}{\mathrm{d}x} + \ldots &= \varphi_1(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}),\\ Y'' - \frac{\mathrm{d}\,Y'''}{\mathrm{d}x} + \ldots &= \varphi_2(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ Y^{(n-1)} - \frac{\mathrm{d}\,Y^{(n)}}{\mathrm{d}x} &= \varphi_{(n-1)}(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}),\\ Y^{(n)} &= \varphi_n(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}),\end{aligned}$$

l'intégrale sera

$$\int V dx = \int_{x_0}^{x} [V - y'\varphi_1(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) - y''\varphi_2(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) - \ldots - y^{(n)}\varphi_n(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})] dx$$

$$+ \int_{y_0}^{y} \varphi_1(x_0, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) dy$$

$$+ \int_{y'_0}^{y'} \varphi_2(x_0, y_0, y', y^{(n-1)}) dy' + \ldots$$

. . . .

$$+ \int_{y_0^{(n-2)}}^{y^{(n-2)}} \varphi_{(n-1)}(x_0, y_0, y'_0, \ldots, y^{(n-2}, y^{(n-1)}) dy^{(n-2)}$$

$$+ \int_{y_0^{(n-1)}}^{y^{(n-1)}} \varphi_{(n)}(x_0, y_0, \ldots, y_0^{(n-2)}, y^{n-1}) dy^{(n-1)}.$$

8. Pour éclaircir ceci par un exemple, prenons la fonction différentielle

$$V = 2x^2 + y^2 + 2xyy' + y'^2 + yy'' + xy'''.$$

Nous aurons

$$Y = 2y + 2xy' + y'', \quad Y' = 2xy + 2y', \quad Y'' = y, \quad Y''' = x,$$

$$\frac{dY'}{dx} = 2y + 2xy' + 2y'', \quad \frac{dY''}{dx} = y', \quad \frac{d^2Y''}{dx^2} = y'',$$

$$\frac{dY'''}{dx} = 1, \quad \frac{d^2Y'''}{dx^2} = 0, \quad \frac{d^3Y'''}{dx^3} = 0.$$

L'équation de condition est vérifiée, comme il est aisé de s'en convaincre, et l'intégrale cherchée est

$$\int_{x_0}^{x} (2x^2 + y^2 + y'') dx + \int_{y_0}^{y} (2x_0 y + y') dy + \int_{y'_0}^{y'} (y_0 - 1) dy' + \int_{y''_0}^{y''} x_0 dy'',$$

ce qui donne, en faisant les réductions,

$$\frac{2x^3}{3} + y^2 x + y'' x + yy' - y' + C.$$

9. On peut encore donner à $\int V dx$ une autre forme, analogue à celle qu'a donnée Poisson, mais dans laquelle les intégrales sont plus simples. En effet, puisqu'il n'y a dans l'expression finale qu'une seule constante, on peut prendre zéro pour les limites inférieures des intégrales dans le cas où cette valeur attribuée aux limites ne rend infinie aucune des fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, etc., et écrire, en renversant l'ordre des intégrations,

$$\begin{aligned}\int V dx = \int_0^{y^{(n-1)}} & \varphi_n(x, y, y', \ldots, y^{(n-2)}, y^{(n-1)})\, dy^{(n-1)} \\ & + \int_0^{y^{(n-2)}} \varphi_{(n-1)}(x, y, y', \ldots, y^{(n-2)}, 0)\, dy^{(n-2)} + \ldots \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \int_0^{y'} \varphi_2(x, y, y', 0, 0, \ldots, 0)\, dy' \\ & + \int_0^{y} \varphi_1(x, y, 0, 0, \ldots, 0)\, dy + \int f(x, 0, 0, \ldots, 0)\, dx,\end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned}\int V dx = & \int f(x, 0, 0, \ldots, 0)\, dx \\ & + \int_0^1 [\varphi_1(x, uy, 0, 0, \ldots) y + \varphi_2(x, y, uy', 0, 0, \ldots) y' \\ & \qquad + \varphi_n(x, y, \ldots, uy^{(n-1)}) y^{(n-1)}]\, du.\end{aligned}$$

L'exemple précédent traité de cette manière donne

$$\begin{aligned}\int 2x^2 dx + \int_0^y 2xy\, dy + \int_0^{y'} (y-1)\, dy' + \int_0^{y''} x\, dy'' \\ = \frac{2x^3}{3} + xy^2 + yy' - y' + xy'' + C,\end{aligned}$$

ce qui est identique avec le résultat obtenu plus haut.

10. Notre analyse, comme on peut s'en convaincre avec un peu d'attention, s'applique encore à une fonction

$$f(x, y, y', \ldots, y^{(n)}, z, z', \ldots, z^{(m)})\,dx,$$

qui proviendrait de la différentiation totale d'une fonction

$$\psi(x, y, \ldots, y^{(n-1)}, z, z, \ldots, z^{(m-1)}).$$

La méthode des variations conduit alors à deux équations exprimant les conditions d'intégrabilité, et l'on reconnaîtra sans peine que Vdx peut, dans ce cas, être mis sous la forme d'une différentielle exacte du premier ordre, qui s'intégrera par le procédé connu [*].

---

[*] Je n'aime pas à intervenir par des notes dans les travaux de mes collaborateurs. Qu'il me soit pourtant permis de rappeler au souvenir des géomètres, à l'occasion de cet article, un Mémoire de M. Raabe (*Journal de Crelle*, t. XXXI, p. 181) et surtout un Mémoire de l'excellent et regretté Joachimsthal (*Journal de Crelle*, t. XXXIII, p. 95). (J. LIOUVILLE.)

SUR LA FORME
$x^2 + 2y^2 + 4z^2 + 4t^2$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

1. Etant donné un entier n pair ou impair (que nous représenterons par $2^\alpha m$, m étant impair et l'exposant α pouvant se réduire à zéro), on demande une règle simple pour calculer le nombre N des représentations de n par la forme

$$x^2 + 2y^2 + 4z^2 + 4t^2,$$

c'est-à-dire le nombre N des solutions de l'équation

$$n = x^2 + 2y^2 + 4z^2 + 4t^2,$$

où x, y, z, t sont des entiers indifféremment positifs, nuls ou négatifs. Or on va voir que tout dépend de la fonction $\omega_1(m)$ dont nous avons parlé plusieurs fois déjà, en la définissant au moyen des facteurs conjugués d, δ de l'entier $m = d\delta$, par la formule

$$\omega_1(m) = \sum (-1)^{\frac{\delta^2 - 1}{8}} d.$$

2. Soit d'abord n impair, $n = m$. Je trouve que l'on a

$$\mathrm{N} = 2\omega_1(m),$$

quelle que soit la forme linéaire de m.

Ainsi, pour $m = 1$, on a $\mathrm{N} = 2$; et c'est ce que confirme l'équation

$$1 = (\pm 1)^2 + 2.0^2 + 4.0^2 + 4.0^2.$$

Pour $m = 3$, on a $\mathrm{N} = 2\omega_1(3) = 4$. L'équation

$$3 = (\pm 1)^2 + 2(\pm 1)^2 + 4.0^2 + 4.0^2$$

confirme ce fait. Pour $m = 5$, il vient $N = 2\omega_1(5) = 8$. Or on a en effet huit représentations fournies par les équations

$$5 = (\pm 1)^2 + 2.0^2 + 4(\pm 1)^2 + 4.0^2,$$
$$5 = (\pm 1)^2 + 2.0^2 + 4.0^2 + 4(\pm 1)^2.$$

Enfin pour $m = 7$, on a $N = 2\omega_1(m) = 16$; et les deux équations

$$7 = (\pm 1)^2 + 2(\pm 1)^2 + 4(\pm 1)^2 + 4.0^2,$$
$$7 = (\pm 1)^2 + 2(\pm 1)^2 + 4.0^2 + 4(\pm 1)^2$$

donnent, comme il le faut, seize représentations.

5. Soit à présent n pair, $n = 2^\alpha m$, $\alpha > 0$. Alors on a

$$N = 2(2^\alpha - 1)\,\omega_1(m)$$

si $m = 8k \pm 1$, mais

$$N = 2(2^\alpha + 1)\,\omega_1(m)$$

si $m = 8k \pm 3$.

Ainsi pour $n = 2$, il viendra $N = 2$, conformément à l'équation

$$2 = 0^2 + 2(\pm 1)^2 + 4.0^2 + 4.0^2,$$

tandis que pour $n = 4$, on aura $N = 6$, comme le montrent en effet les trois équations

$$4 = (\pm 2)^2 + 2.0^2 + 4.0^2 + 4.0^2,$$
$$4 = 0^2 + 2.0^2 + 4(\pm 1)^2 + 4.0^2,$$
$$4 = 0^2 + 2.0^2 + 4.0^2 + 4(\pm 1)^2.$$

Pour $n = 6$, on aura $N = 2(2 + 1)\,\omega_1(3) = 12$. Ce fait est confirmé par les équations ci-après :

$$6 = (\pm 2)^2 + 2(\pm 1)^2 + 4.0^2 + 4.0^2,$$
$$6 = 0^2 + 2(\pm 1)^2 + 4(\pm 1)^2 + 4.0^2,$$
$$6 = 0^2 + 2(\pm 1)^2 + 4.0^2 + 4(\pm 1)^2.$$

Enfin, pour $n = 10$, les équations

$$10 = 0^2 + 2(\pm 1)^2 + 4(\pm 1)^2 + 4(\pm 1)^2,$$
$$10 = (\pm 2)^2 + 2(\pm 1)^2 + 4.0^2 + 4(\pm 1)^2,$$
$$10 = (\pm 2)^2 + 2(\pm 1)^2 + 4(\pm 1)^2 + 4.0^2,$$

vérifient encore nos formules qui donnent $N = 2(2+1)\omega_1(5) = 24$.

4. Occupons-nous aussi du nombre M des représentations *propres*, et à cet effet introduisons la fonction $O_1(m)$ définie, au moyen de la décomposition de m en facteurs premiers,

$$m = \prod (p^\mu),$$

par l'équation

$$O_1(m) = \prod \left[p^\mu + (-1)^{\frac{p^2-1}{8}} p^{\mu-1} \right].$$

Pour n impair, $n = m$, on a

$$M = 2O_1(m),$$

quelle que soit la forme linéaire de m. Pour n impairement pair, $n = 2m$, je trouve au contraire

$$M = 2O_1(m)$$

si $m = 8k \pm 1$, mais

$$M = 6O_1(m)$$

si $m = 8k \pm 3$. De même pour n divisible par 4, non par 8, $n = 4m$, on a

$$M = 4O_1(m \quad \text{ou} \quad M = 8O_1(m),$$

suivant que $m = 8k \pm 1$ ou $= 8k \pm 3$. Mais pour n divisible par 8, $n = 2^\alpha m$, $\alpha > 2$, la formule unique est

$$M = 3.2^{\alpha-1}.O_1(m).$$

SUR LA FORME
$x^2 + 2y^2 + 8z^2 + 8t^2$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

1. On demande le nombre N des représentations d'un entier quelconque n (ou $2^\alpha m$, m impair, $\alpha = 0, 1, 2,\ldots$) par la forme

$$x^2 + 2y^2 + 8z^2 + 8t^2;$$

et c'est encore de la fonction $\omega_1(m)$, employée dans l'article précédent, que tout va dépendre.

Et d'abord pour n impair, $n = m$, on a évidemment $N = 0$, quand m est de l'une des deux formes $8k - 1$, $8k - 3$; mais

$$N = 2\omega_1(m)$$

quand m est de la forme $8k + 1$ ou de la forme $8k + 3$.

Soit, par exemple, $m = 1$. On aura $N = 2$, conformément à la double équation

$$1 = (\pm 1)^2 + 2.0^2 + 8.0^2 + 8.0^2.$$

Soit ensuite $m = 3$. Notre formule donnera

$$N = 2.2 = 4.$$

L'équation

$$3 = (\pm 1)^2 + 2(\pm 1)^2 + 8.0^2 + 8.0^2$$

confirme ce fait.

Soit encore $m = 9$. On aura

$$N = 2.7 = 14.$$

Or l'entier 9 a en effet quatorze représentations que fournissent les équations ci-après :

$$9 = (\pm 1)^2 + 2.0^2 + 8(\pm 1)^2 + 8.0^2,$$
$$9 = (\pm 1)^2 + 2.0^2 + 8.0^2 + 8(\pm 1)^2,$$
$$9 = (\pm 1)^2 + 2(\pm 2)^2 + 8.0^2 + 8.0^2,$$
$$9 = (\pm 3)^2 + 2.0^2 + 8.0^2 + 8.0^2.$$

Soit enfin $m = 17$. Nous aurons

$$N = 2.18 = 36;$$

et c'est ce que vérifient les équations

$$17 = 3^2 + 2.2^2 + 8.0^2 + 8.0^2,$$
$$17 = 3^2 + 2.0^2 + 8.1^2 + 8.0^2,$$
$$17 = 1^2 + 2.0^2 + 8.1^2 + 8.1^2,$$
$$17 = 1^2 + 2.2^2 + 8.1^2 + 8.0^2,$$

en affectant du double signe $\pm$ les racines des carrés qui ne sont pas nuls et en opérant les permutations convenables.

2. Soit à présent n pair, $n = 2^\alpha m$, $\alpha > 0$. Il est clair que dans l'équation

$$2^\alpha m = x^2 + 2y^2 + 8z^2 + 8t^2,$$

le premier carré sera pair. Soit donc $x = 2x_1$; en divisant par 2, nous aurons

$$2^{\alpha-1} m = 2x_1^2 + y^2 + 4z^2 + 4t^2,$$

ou bien

$$2^{\alpha-1} m = y^2 + 2x_1^2 + 4z^2 + 4t^2,$$

en sorte que nous serons ramenés à la forme considérée dans l'article précédent.

D'après cela, voici comment le nombre N des représentations d'un

entier pair $2^\alpha m$, par la forme actuelle

$$x^2 + 2y^2 + 8z^2 + 8t^2,$$

se calculera suivant les cas.

Pour n impairement pair, $n = 2m$, on aura

$$N = 2\omega_1(m),$$

quelle que soit la forme linéaire de m.

Et pour n pairement pair, $n = 2^\alpha m$, $\alpha > 1$, il faudra prendre

$$N = 2(2^{\alpha-1} - 1)\omega_1(m)$$

si $m = 8k \pm 1$, mais

$$N = 2(2^{\alpha-1} + 1)\omega_1(m)$$

si $m = 8k \pm 3$.

5. On peut aussi demander à part le nombre M des représentations *propres* de l'entier n ou $2^\alpha m$, par la forme

$$x^2 + 2y^2 + 8z^2 + 8t^2$$

qui nous occupe. Voici les résultats qu'on obtient à cet égard, au moyen de la fonction $O_1(m)$, la même qui a figuré pour un usage analogue dans l'article précédent.

Pour n impair, $n = m$, on a $M = 0$, si m est de l'une des deux formes $8k - 1$, $8k - 3$; mais

$$M = 2O_1(m),$$

si m est de la forme $8k + 1$ ou de la forme $8k + 3$.

Pour n impairement pair, $n = 2m$, on a

$$M = 2O_1(m),$$

quelle que soit la forme linéaire de m.

Pour n divisible par 4, non par 8, $n = 4m$, on a

$$M = 0$$

si $m = 8k + 1$, mais

$$M = 4O_1(m)$$

si $m = 8k + 3$, ou bien

$$M = 6O_1(m)$$

si $m = 8k - 3$, enfin

$$M = 2O_1(m)$$

si $m = 8k - 1$.

Pour n divisible par 8, non par 16, $n = 8m$, il vient

$$M = 4O_1(m)$$

si $m = 8k \pm 1$, mais

$$M = 8O_1(m)$$

si $m = 8k \pm 3$.

Enfin pour n divisible par 16, $n = 2^\alpha m$, $\alpha > 3$, on a généralement

$$M = 3.2^{\alpha-2}O_1(m),$$

quelle que soit la forme linéaire de m.

SUR LA FORME

$x^2 + 8y^2 + 16z^2 + 16t^2$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

---

1. Étant donné un entier n pair ou impair (que nous représenterons par $2^\alpha m$ (m étant impair et l'exposant α pouvant se réduire à zéro), on demande le nombre N des représentations de n par la forme

$$x^2 + 8y^2 + 16z^2 + 16t^2,$$

c'est-à-dire le nombre N des solutions de l'équation

$$n = x^2 + 8y^2 + 16z^2 + 16t^2,$$

où x, y, z, t sont des entiers indifféremment positifs, nuls ou négatifs.

Le cas de n impair, $n = m$, est le plus intéressant. Pour les nombres de l'une des trois formes $8k + 3$, $8k - 3$, $8k - 1$, on a évidemment $N = 0$. Mais le cas de

$$n = m = 8k + 1$$

est très-curieux. Il faut considérer d'une part la fonction numérique $\omega_1(m)$ définie, au moyen des facteurs conjugués d, δ de l'entier $m = d\delta$, par l'équation

$$\omega_1(m) = \sum (-1)^{\frac{\delta^2 - 1}{8}} d,$$

et d'autre part la somme

$$\sum (-1)^{\frac{r-1}{2}} r$$

relative aux entiers r impairs et positifs qui peuvent figurer dans l'équation

$$m = r^2 + 2u^2,$$

où l'entier u (qui sera pair ici, puisque $m = 8k + 1$) doit être pris, quand il n'est pas nul, avec le double signe $\pm$. Cela posé, on a

$$N = \omega_1(m) + \sum (-1)^{\frac{r-1}{2}} r.$$

Soit, par exemple, $m = 1 = 1^2 + 2.0^2$; par suite

$$\omega_1(m) = 1, \quad \sum (-1)^{\frac{r-1}{2}} r = 1.$$

Notre formule donnera

$$N = 2,$$

ce que confirme l'équation

$$1 = (\pm 1)^2 + 8.0^2 + 16.0^2 + 16.0^2$$

qui fournit en effet deux représentations.

Soit, en second lieu, $m = 9$. On a $\omega(9) = 7$. De plus les équations

$$9 = 3^2 + 2.0^2, \quad 9 = 1^2 + 2(\pm 2)^2$$

donnent trois valeurs de r, l'une égale à 3, les deux autres égales à 1. Donc

$$N = 7 - 3 + 2 = 6.$$

Or le nombre 9 a en effet six représentations contenues dans les équations

$$9 = (\pm 3)^2 + 8.0^2 + 16.0^2 + 16.0^2,$$
$$9 = (\pm 1)^2 + 8(\pm 1)^2 + 16.0^2 + 16.0^2.$$

Soit encore $m = 17 = 3^2 + 2(\pm 2)^2$. Alors

$$N = 18 - 2.3 = 12:$$

cette valeur de N s'accorde avec les équations

$$17 = (\pm 1)^2 + 8.0^2 + 16(\pm 1)^2 + 16.0^2,$$
$$17 = (\pm 3)^2 + 2(\pm 2) + 16.0^2 + 16.0^2,$$

dans la première desquelles on peut permuter les deux derniers termes.

Soit enfin $m = 25 = 5^2 + 2.0^2$. Il viendra

$$N = 21 + 5 = 26.$$

Or cette valeur de N est vérifiée par les trois équations

$$25 = 5^2 + 8.0^2 + 16.0^2 + 16.0^2,$$
$$25 = 1^2 + 8.1^2 + 16.1^2 + 16.0^2,$$
$$25 = 3^2 + 8.0^2 + 16.1^2 + 16.0^2,$$

en y affectant du double signe les racines des carrés qui ne sont pas nuls et en opérant les permutations convenables.

2. Soit à présent n pair, $n = 2^\alpha m$, $\alpha > 0$. Il est clair que dans l'équation

$$2^\alpha m = x^2 + 8y^2 + 16z^2 + 16t^2,$$

le premier carré devra être pair, partant divisible par 4. Si donc on a $\alpha = 1$, $n = 2m$, l'équation sera impossible, de sorte qu'alors

$$N = 0$$

Mais si n est pairement pair, $\alpha > 1$, alors en posant $x = 2x_1$ et divisant par 4, on trouvera

$$2^{\alpha-2} m = x_1^2 + 2y^2 + 4z^2 + 4t^2,$$

ce qui nous ramène à une forme dont nous nous sommes occupés dans ce cahier même.

Il en résulte pour le nombre N des représentations d'un entier n

pairement pair, par la forme actuelle

$$x^2 + 8y^2 + 16z^2 + 16t^2,$$

les résultats suivants :

1° Soit n divisible par 4, non par 8, $n = 4m$. Alors

$$N = 2\omega_1(m),$$

quelle que soit la forme linéaire de m. Ainsi l'entier 4 a deux représentations fournies par l'équation

$$4 = (\pm 2) + 8.0^2 + 16.0^2 + 16.0^2,$$

et l'entier 12 en a quatre contenues dans la formule

$$12 = (\pm 2)^2 + 8(\pm 1)^2 + 16.0^2 + 16.0^2.$$

2°. Soit n divisible par 8, $n = 2^\alpha m$, $\alpha > 2$. On aura

$$N = 2(2^{\alpha-2} - 1)\omega_1(m)$$

si $m = 8k \pm 1$, mais

$$N = 2(2^{\alpha-2} + 1)\omega_1(m)$$

si $m = 8k \pm 3$.

Ainsi l'entier 8 a deux représentations fournies par la formule

$$8 = 0^2 + 8(\pm 1)^2 + 16.0^2 + 16.0^2;$$

et l'entier 24 en a douze, contenues dans les équations que voici :

$$24 = 0^2 + 8(\pm 1)^2 + 16(\pm 1)^2 + 16.0^2,$$
$$24 = 0^2 + 8(\pm 1)^2 + 16.0^2 + 16(\pm 1)^2,$$
$$24 = (\pm 4)^2 + 8(\pm 1)^2 + 16.0^2 + 16.0^2.$$

SUR LA FORME

$x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 16t^2$;

Par M. J. LIOUVILLE.

1. Étant donné un entier n pair ou impair (que nous représenterons par $2^\alpha m$, m étant impair et l'exposant α pouvant se réduire à zéro), on demande le nombre N des représentations de n par la forme

$$x^3 + 4y^2 + 4z^2 + 16t^2,$$

c'est-à-dire le nombre N des solutions de l'équation indéterminée

$$n = x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 16t^2,$$

où x, y, z, t sont des entiers positifs, nuls ou négatifs.

Il est bien clair que l'on aura $N = 0$ si l'entier n est impair et de la forme $4l + 3$. On aura aussi $N = 0$ si m est le double d'un entier impair quelconque. Mais dans tous les autres cas on aura $N > 0$; et la valeur de N dépendra surtout de la fonction numérique $\zeta_1(m)$, qui exprime la somme des diviseurs de m : on pourra en outre avoir à calculer la somme

$$\sum (-1)^{\frac{i-1}{2}} i$$

des entiers positifs i figurant dans l'équation

$$m = i^2 + 4s^3,$$

où l'entier s est indifféremment positif, nul ou négatif.

2. Soit d'abord n impair, $n = m = 4l + 1$. On aura

$$N = \zeta_1(m) + \sum (-1)^{\frac{i-1}{2}} i.$$

Ainsi, pour $m = 1 = 1^2 + 4.0^2$, on aura

$$\zeta_1(m) = 1, \quad \sum (-1)^{\frac{i-1}{2}} i = 1;$$

donc

$$N = 2,$$

ce qui est confirmé par l'équation double

$$1 = (\pm 1)^2 + 4.0^2 + 4.0^2 + 16.0^2.$$

Pour $m = 5 = 1^2 + 4(\pm 1)^2$, on a

$$\zeta_1(m) = 6, \quad \sum (-1)^{\frac{i-1}{2}} i = 2,$$

donc

$$N = 8.$$

Les équations

$$5 = (\pm 1)^2 + 4(\pm 1)^2 + 4.0^2 + 16.0^2,$$
$$5 = (\pm 1)^2 + 4.0^2 + 4(\pm 1)^2 + 16.0^2$$

confirment ce fait.

Soit encore $m = 9 = 3^2 + 4.0^2$; il viendra

$$\zeta_1(9) = 13, \quad \sum (-1)^{\frac{i-1}{2}} i = -3,$$

donc

$$N = 10;$$

et on a en effet pour l'entier 9 dix représentations fournies par les équations

$$9 = (\pm 3)^2 + 4.0^2 + 4.0^2 + 16.0^2,$$
$$9 = (\pm 1)^2 + 4(\pm 1)^2 + 4(\pm 1)^2 + 16.0^2.$$

Pour $m = 13 = 3^2 + 4(\pm 1)^2$, on a

$$\zeta_1(m) = 14, \quad \sum (-1)^{\frac{i-1}{2}} i = -6,$$

d'où

$$N = 8;$$

et 13 n'a réellement que les huit représentations indiquées par

$$13 = (\pm 3)^2 + 4(\pm 1)^2 + 4.0^2 + 16.0^2,$$
$$13 = (\pm 3)^2 + 4.0^2 + 4(\pm 1)^2 + 16.0^2.$$

Soit enfin $m = 17 = 1^2 + 4(\pm 2)^2$. Ayant

$$\zeta_1(m) = 18, \quad \sum (-1)^{\frac{i-1}{2}} = 2,$$

on en conclura

$$N = 20.$$

Or on trouve pour l'entier 17 vingt représentations ainsi qu'il suit :

$$17 = (\pm 1)^2 + 4.0^2 + 4.0^2 + 16(\pm 1)^2,$$
$$17 = (\pm 1)^2 + 4(\pm 2)^2 + 4.0^2 + 16.0^2,$$
$$17 = (\pm 1)^2 + 4.0^2 + 4(\pm 2)^2 + 16.0^2,$$
$$17 = (\pm 3)^2 + 4(\pm 1)^2 + 4(\pm 1)^2 + 16.0^2.$$

3. Soit à présent n pairement pair, $n = 2^\alpha m$, $\alpha > 1$. Il est clair que dans l'équation

$$2^\alpha m = x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 16t^2,$$

on doit avoir en nombres entiers $x = 2x_1$. En divisant par 4, il viendra donc

$$2^{\alpha-2} m = x_1^2 + y^2 + z^2 + 4t^2,$$

ce qui nous ramène à une équation dont nous nous sommes occupés (cahier de décembre 1861). On est ainsi conduit, pour le nombre des

représentations de l'entier pairement pair (n ou $2^\alpha m$) par la forme actuelle

$$x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 16t^2$$

aux conclusions suivantes :

1° Pour n divisible par 4, non par 8, $n = 4m$, on a

$$N = 6\zeta_1(m)$$

si $m = 4l + 1$, mais

$$N = 2\zeta_1(m)$$

si $m = 4l + 3$.

2° Pour n divisible par 8, non par 16, $n = 8m$, on a

$$N = 12\zeta_1(m),$$

quelle que soit la forme linéaire de m.

3° Pour n divisible par 16, non par 32, $n = 16m$, on a de même une formule unique

$$N = 8\zeta_1(m).$$

4° Enfin pour n divisible par 32 avec quotient pair ou impair, $n = 2^\alpha m$, $\alpha > 4$, on a constamment

$$N = 24\zeta_1(m),$$

quelque grand que puisse devenir l'exposant α et quelle que soit la forme linéaire de m.

Je ne m'arrêterai pas à la recherche des solutions propres, m'en référant sur ce point à la méthode générale qui s'offre d'elle-même

SUR LA FORME
$x^2 + 16(y^2 + z^2 + t^2)$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

1. Étant donné un entier n pair ou impair (que nous représenterons par $2^\alpha m$, m étant impair et l'exposant α pouvant se réduire à zéro), on demande le nombre N des représentations de n par la forme

$$x^2 + 16(y^2 + z^2 + t^2),$$

c'est-à-dire le nombre N des solutions de l'équation

$$n = x^2 + 16(y^2 + z^2 + t^2),$$

où x, y, z sont des entiers positifs, nuls ou négatifs.

Il est bien clair que l'on aura $N = 0$ si n est impair et de la forme $4l + 3$ ou $8k + 5$: on aura aussi $N = 0$ si n est impairement pair ou le produit de 8 par un entier impair, et encore si $n = 4(4l + 3)$. Mais dans tous les autres cas la valeur de N sera > 0 et se calculera comme on va l'expliquer.

2. Soit d'abord n impair, $n = m = 8k + 1$. On formera en premier lieu la somme $\zeta_1(m)$ des diviseurs de m; puis posant l'équation

$$m = i^2 + 4s^2,$$

où i désigne un entier impair *positif*, tandis que l'entier s (qui est pair à cause de $m = 8k + 1$) doit être pris, quand il n'est pas nul, avec le double signe $\pm$, on cherchera cette seconde somme

$$\sum (-1)^{\frac{i-1}{2}} i,$$

relative à toutes les valeurs de i. Cela posé, on aura

$$N = \frac{1}{2}\left[\zeta_1(m) + 3\sum(-1)^{\frac{i-1}{2}} i\right].$$

La somme

$$\sum(-1)^{\frac{i-1}{2}} i$$

pouvant être négative, on peut se demander si la valeur de N que je viens d'écrire donne toujours $N > 0$. Mais un raisonnement très-simple lève cette difficulté; car la somme

$$\sum(-1)^{\frac{i-1}{2}} i$$

ne peut avoir une valeur différente de zéro qu'autant que l'on a au moins une équation de la forme

$$m = i^2 + 4s^2,$$

ou plutôt de la forme

$$m = i^2 + 16v^2,$$

puisque s doit être pair à cause de $m = 8k + 1$. Or une telle équation entraîne celle-ci :

$$m = (\pm i)^2 + 16(v^2 + 0^2 + 0^2)$$

qui, si $v = 0$, donne deux représentations du genre de celles qui nous occupent, et qui en donnerait douze (en affectant v du double signe et permutant) si v n'est pas zéro. On a donc toujours au moins $N = 2$.

Ce mode de raisonnement (que nous aurons souvent à employer dans le cours de nos recherches) mérite d'être remarqué. Nous aurions pu en faire usage à l'occasion d'une question analogue dans le cahier de novembre 1861; mais le procédé dont nous nous sommes servis alors a aussi ses avantages.

3. Appliquons la formule

$$N = \frac{1}{2}\left[\zeta_1(m) + 3\sum(-1)^{\frac{i-1}{2}} i\right]$$

à quelques entiers impairs $8k+1$.

Soit d'abord $m = 1 = 1^2 + 4.0^2$, d'où

$$N = \frac{1}{2}(1+3) = 2.$$

Cette valeur de N s'accorde avec la double équation

$$1 = (\pm 1)^2 + 16(0^2 + 0^2 + 0^2).$$

Soit ensuite $m = 9 = 3^2 + 4.0^2$. Ayant cette fois

$$\zeta_1(m) = 13, \quad \sum(-1)^{\frac{i-1}{2}} i = -3,$$

on en conclura

$$N = \frac{1}{2}(13 - 9) = 2,$$

et en effet 9 a deux représentations contenues dans l'équation

$$9 = (\pm 3)^2 + 16(0^2 + 0^2 + 0^2).$$

Soit encore $m = 17 = 1^2 + 4(\pm 2)^2$. Il viendra

$$\zeta_1(m) = 18, \quad \sum(-1)^{\frac{i-1}{2}} i = 2,$$

partant

$$N = \frac{1}{2}(18 + 6) = 12.$$

Or 17 a en effet douze représentations que l'équation

$$17 = (\pm 1)^2 + 16[(\pm 1)^2 + 0^2 + 0^2]$$

fournit en effectuant sous la parenthèse les permutations convenables.

Soit enfin $m = 25$, ce qui donne lieu aux équations

$$m = 5^2 + 4.0^2, \quad m = 3^2 + 4(\pm 2)^2.$$

Il viendra

$$\zeta_1(m) = 31, \quad \sum (-1)^{\frac{i-1}{2}} i = -1,$$

partant

$$N = \frac{1}{2}(31 - 3) = 14.$$

Or 25 a en effet 14 représentations provenant des décompositions

$$25 = 5^2 + 16(0^2 + 0^2 + 0^2), \qquad 25 = 3^2 + 16(1^2 + 0^2 + 0^2),$$

où l'on donnera le double signe aux racines des carrés qui ne sont pas nuls et où l'on opérera les permutations voulues.

4. Soit à présent n pairement pair, $n = 2^\alpha m$, $\alpha > 1$. Dans l'équation

$$2^\alpha m = x^2 + 16(y^2 + z^2 + t^2),$$

l'entier x devra être pair. Faisant donc $x = 2x_1$ et divisant par 4, on sera amené à l'équation

$$2^{\alpha-2} m = x_1^2 + 4(y^2 + z^2 + t^2)$$

que nous avons déjà discutée (dans le cahier de décembre 1861). Il en résultera pour notre recherche actuelle les conclusions suivantes :

1° Pour n divisible par 4, non par 8, $n = 4m$, on a (comme je l'ai déjà dit) $N = 0$ si $m = 4l + 3$; mais

$$N = 2\zeta_1(m)$$

si $m = 4l + 1$.

2° Pour n divisible par 8, non par 16, $n = 8m$, on a constamment $N = 0$: j'en ai déjà averti.

3° Pour n divisible par 16, non par 32, $n = 16m$, on a

$$N = 8\zeta_1(m),$$

quelle que soit la forme linéaire de m.

4° Enfin pour n divisible par 32, $n = 2^\alpha m$, $\alpha > 4$, on a toujours

$$N = 24\zeta_1(m),$$

quelque grand que α puisse devenir.

NOUVELLE THÉORIE

DES

FONCTIONS DE VARIABLES IMAGINAIRES;

Par M. Maximilien MARIE,
Ancien élève de l'École Polytechnique.

QUATRIÈME PARTIE.

DES ANGLES IMAGINAIRES ET DE LA COURBURE DES COURBES ET SURFACES IMAGINAIRES.

(Suite.)

CHAPITRE X.

Des angles imaginaires au centre du cercle réel et des triangles imaginaires définis par des données réelles.

147. *Construction d'un angle imaginaire sans partie réelle, dont on donne les lignes trigonométriques.* — L'intégrale

$$\int_{x_0}^{x} dx\sqrt{a^2 - x^2}$$

représente l'aire du demi-segment intercepté dans le cercle $y^2+x^2=a^2$ par les ordonnées menées à des distances x_0 et x du centre; la même aire est aussi représentée par

$$\frac{1}{2}a^2\left(\text{arc cos}\frac{x_0}{a} - \text{arc cos}\frac{x}{a}\right) + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} - \frac{x_0}{2}\sqrt{a^2 - x_0^2},$$

de sorte que

$$\int_{x_0}^{x} dx\sqrt{a^2 - x^2} = \frac{1}{2}a^2\left(\text{arc cos}\frac{x_0}{a} - \text{arc cos}\frac{x}{a}\right) + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} - \frac{x_0}{2}\sqrt{a^2 - x_0^2}.$$

Si l'aire mesurée est limitée à droite par la tangente $x = a$, l'égalité précédente devient

$$\int_{x_0}^{a} dx\sqrt{a^2 - x^2} = \frac{a^2}{2}\text{arc cos}\frac{x_0}{a} - \frac{x_0}{2}\sqrt{a^2 - x_0^2}$$

ou bien

$$\int_{a}^{x} dx\sqrt{a^2 - x^2} = -\frac{a^2}{2}\text{arc cos}\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Si x devient plus grand que a, cette égalité peut s'écrire

$$\sqrt{-1}\int_{a}^{x} dx\sqrt{x^2 - a^2} = -\frac{a^2}{2}\text{arc cos}\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{-1}\sqrt{x^2 - a^2}$$

ou bien

$$\int_{a}^{x} dx\sqrt{x^2 - a^2} = \frac{a^2\sqrt{-1}}{2}\text{arc cos}\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - a^2}.$$

Mais $\int_{a}^{x} dx\sqrt{x^2 - a^2}$ représente l'aire du demi-segment intercepté dans l'hyperbole équilatère

$$y^2 - x^2 = -a^2,$$

entre le sommet de cette courbe et l'ordonnée menée à la distance x du centre; l'aire de ce segment est donc

$$\frac{a^2\sqrt{-1}}{2}\text{arc cos}\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - a^2};$$

d'un autre côté, l'aire du triangle compris entre l'axe des x, l'ordonnée de l'hyperbole menée à la distance x de l'origine et le rayon mené

du centre au point $[x, y]$ de la courbe est

$$\frac{x}{2}\sqrt{x^2 - a^2};$$

par conséquent le secteur hyperbolique, compris entre les rayons dirigés au sommet et au point $[x, y]$, étant la différence du triangle et du segment, son aire sera

$$-\frac{a^2\sqrt{-1}}{2} \text{ arc cos } \frac{x}{a}.$$

En désignant donc par ψ le rapport de l'aire de ce secteur à celle du carré construit sur le rayon a comme diagonale, on pourra écrire

$$-\frac{a^2\sqrt{-1}}{2} \text{ arc cos } \frac{x}{a} = \frac{a^2}{2}\psi,$$

ou

$$\text{arc cos } \frac{x}{a} = \psi\sqrt{-1}.$$

Ainsi la valeur absolue de l'angle imaginaire, sans partie réelle, dont le cosinus est une quantité réelle $\frac{x}{a}$, plus grande que 1, est le rapport à $\frac{a^2}{2}$ ou au carré construit sur a comme diagonale, du secteur intercepté dans l'hyperbole équilatère

$$y^2 - x^2 = -a^2,$$

entre l'axe transverse, la courbe et le rayon mené au point dont l'abscisse est x.

Lorsque a et x varieront proportionnellement, le rapport des aires du secteur hyperbolique et du carré $\frac{a^2}{2}$ restera constant, en sorte que l'angle imaginaire $\psi\sqrt{-1}$ ne variera pas; d'ailleurs, x et y se trouvant multipliés par un même nombre, l'angle réel formé, avec l'axe transverse, par le rayon de l'hyperbole, mené au point $[x, y]$, conservera

aussi la même ouverture. L'angle réel et l'angle imaginaire dépendant donc l'un de l'autre, ils pourront être figurés l'un par l'autre.

148. Pour résumer ce qui précède, et le compléter de manière à définir à la fois les six lignes trigonométriques d'un angle formé d'une seule partie réelle ou imaginaire, c'est-à-dire ayant l'une ou l'autre des formes φ ou $\psi\sqrt{-1}$, nous dirons :

Si dans l'équation

$$y^2 + x^2 = 1$$

on donne à x une valeur réelle quelconque et qu'on prenne la valeur correspondante de y, réelle ou imaginaire, x et y seront le cosinus et le sinus de l'angle réel, ou imaginaire sans partie réelle, dont la valeur absolue serait le double de la mesure du secteur circulaire ou hyperbolique intercepté entre l'axe des x et le rayon mené au point $[x, y]$; $\frac{y}{x}$ sera la tangente de cet angle, $\frac{x}{y}$ en sera la cotangente, $\frac{1}{x}$ la sécante et $\frac{1}{y}$ la cosécante.

Le cosinus et la sécante d'un angle imaginaire sans partie réelle seront réels ; le sinus, la tangente, la cotangente et la cosécante seront imaginaires, mais n'auront pas de parties réelles [*].

149. *Construction d'un angle en partie réel, en partie imaginaire, dont les lignes trigonométriques sont données.* — Si dans l'équation

$$y^2 + x^2 = 1$$

on attribue à x une valeur imaginaire $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, et qu'on tire la valeur correspondante de y, $\alpha' + \beta C\sqrt{-1}$, $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ et $\alpha' + \beta C\sqrt{-1}$ seront le cosinus et le sinus d'un angle en partie réel, en partie imaginaire, $\varphi + \psi\sqrt{-1}$: les deux parties φ et ψ de cet angle s'obtiendront aisément par la règle suivante.

---

[*] Tous les faits que nous venons de rapporter étaient connus depuis la fin du dernier siècle. Mais la découverte en était restée stérile, jusqu'ici, parce qu'elle avait été entièrement fortuite.

Le point $[x, y]$ appartenant à la conjuguée C du cercle, si l'on joint le centre à ce point, au point où la conjuguée C touche la courbe réelle, enfin à l'origine de tous les angles, c'est-à-dire à l'extrémité droite du diamètre du cercle couché sur l'axe des x, les trois rayons ainsi menés intercepteront un secteur circulaire et un secteur hyperbolique : φ sera le double de la mesure du secteur circulaire et ψ le double de la mesure du secteur hyperbolique.

En effet, si l'on fait tourner les axes de l'angle dont la tangente est $-\frac{1}{C}$, de manière à amener l'axe des x en coïncidence avec le rayon mené au point de contact de la circonférence et de la branche de la conjuguée C, sur laquelle se trouve le point $[x, y]$, la nouvelle abscisse x' du même point $[x, y]$ sera réelle et son ordonnée y' imaginaire sans partie réelle; l'angle du rayon mené au point $[x', y']$ avec le nouvel axe des x sera donc imaginaire sans partie réelle; d'un autre côté, sa valeur algébrique sera

$$\varphi + \psi\sqrt{-1} - \text{arc tang}\left(-\frac{1}{C}\right);$$

l'angle φ ne différait donc pas de arc tang$\left(-\frac{1}{C}\right)$, c'est-à-dire que sa mesure était bien le double de la mesure du secteur circulaire.

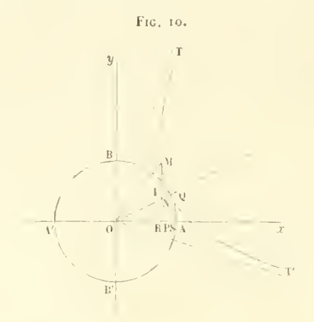
Quant à $\psi\sqrt{-1}$, sa tangente $\frac{y'}{x'}$ étant aussi celle du double du secteur hyperbolique, le double de ce secteur et l'angle ψ ne feront donc qu'un.

On pourrait donner de ce théorème la démonstration suivante qui, sans rien ajouter à l'évidence des faits, présente cependant une analogie assez remarquable avec la démonstration la plus usuelle des théorèmes relatifs à l'addition des arcs réels, pour mériter d'être consignée.

Soient M (*fig.* 10) un point quelconque d'une conjuguée TNT′ du cercle OA, dont le rayon sera pris pour unité, N le point de contact des deux courbes, φ le double de l'aire du secteur circulaire AON, ψ le double de l'aire du secteur hyperbolique NOM, enfin x et y les coordonnées imaginaires du point M : on sait que les parties réelles de x et de y seront les coordonnées du milieu Q de la corde réelle de la conju-

guée, menée par le point M, c'est-à-dire OS et SQ, et que leurs parties imaginaires seront les différences des coordonnées des points Q et M,

Fig. 10.



c'est-à-dire $-$ QI et IM, de sorte que

$$x = \text{OS} - \text{QI}\sqrt{-1}$$

et

$$y = \text{SQ} + \text{IM}\sqrt{-1}.$$

Cela posé, comme

$$\text{NP} = \sin\varphi, \quad \text{OP} = \cos\varphi, \quad \text{MQ}\sqrt{-1} = \sin\psi\sqrt{-1},$$

enfin

$$\text{OQ} = \cos\psi\sqrt{-1}.$$

les triangles semblables OQS et ONP d'une part, OQS et MQI de l'autre donneront

$$\text{OS} = \cos\varphi\cos(\psi\sqrt{-1}), \quad \text{QI} = \frac{\sin\varphi\sin(\psi\sqrt{-1})}{\sqrt{-1}},$$

$$\text{QS} = \sin\varphi\cos(\psi\sqrt{-1}), \quad \text{IM} = \frac{\cos\varphi\sin(\psi\sqrt{-1})}{\sqrt{-1}},$$

d'où

$$x = \cos\varphi\cos(\psi\sqrt{-1}) - \sin\varphi\sin(\psi\sqrt{-1}) = \cos(\varphi + \psi\sqrt{-1})$$

et

$$y = \sin\varphi\cos(\psi\sqrt{-1}) + \cos\varphi\sin(\psi\sqrt{-1}) = \sin(\varphi + \psi\sqrt{-1}).$$

La règle à suivre pour construire l'angle imaginaire dont on donne le sinus ou le cosinus, ou toute autre ligne trigonométrique, se déduit immédiatement de ce qu'on vient de voir.

La droite qui va du centre au point dont les coordonnées sont les parties réelles du sinus et du cosinus donnés, fait avec le diamètre origine un angle égal à la partie réelle de l'angle cherché, et le point de rencontre de cette droite avec la circonférence est le sommet de l'arc d'hyperbole qui doit servir de base au secteur dont l'aire doublée sera la partie imaginaire de l'angle cherché; enfin les parties imaginaires du sinus et du cosinus donnés, ajoutées aux parties réelles des mêmes lignes, fourniront les coordonnées de la seconde extrémité de l'arc hyperbolique en question.

La partie imaginaire $\psi\sqrt{-1}$ de l'angle $\varphi + \psi\sqrt{-1}$ se compte comme la partie réelle de droite à gauche ou de gauche à droite, selon qu'elle est positive ou négative. De sorte que les deux angles $\varphi + \psi\sqrt{-1}$ et $\varphi - \psi\sqrt{-1}$ sont les inclinaisons, sur l'axe des x, des rayons menés aux extrémités d'une même corde réelle de la conjuguée dont l'axe transverse fait avec l'axe des x l'angle réel φ, ou dont la caractéristique est $-\frac{1}{\tang\varphi}$.

On retrouve aisément sur la figure les formules analytiques des angles qui correspondent à une ligne trigonométrique donnée. Ainsi à un sinus y correspondent, en vertu de l'équation

$$y^2 + x^2 = 1,$$

deux cosinus x égaux et de signes contraires; or la partie réelle de x changeant de signe, l'angle φ, d'après la règle énoncée, se change en $\pi - \varphi$; d'un autre côté, la partie imaginaire de x changeant de signe en même temps que la partie réelle, $\psi\sqrt{-1}$ se trouve changé en $-\psi\sqrt{-1}$, de sorte que l'angle devient

$$\pi - \varphi - \psi\sqrt{-1}$$

ou

$$\pi - (\varphi + \psi\sqrt{-1}).$$

Ainsi tous les angles qui répondent à un même sinus sont donnés par les formules

$$2K\pi + (\varphi + \psi\sqrt{-1})$$

et

$$(2K+1)\pi - (\varphi + \psi\sqrt{-1}).$$

Le mode de représentation que nous proposons pour les angles imaginaires est donc aussi fidèle que propre à faire image.

La formule

$$\cos\frac{1}{2}(\psi\sqrt{-1}) = \sqrt{\frac{1+\cos(\psi\sqrt{-1})}{2}}$$

fournit une construction simple de la bissectrice du secteur hyperbolique. De même la formule qui donne $\cos(m\psi\sqrt{-1})$ en fonction de $\cos(\psi\sqrt{-1})$ pourrait être employée à la répétition d'un secteur hyperbolique. Mais il est important d'observer que, bien que dans l'addition des angles imaginaires les secteurs imaginaires se comptent les uns à la suite des autres, cependant le secteur hyperbolique propre à figurer un angle imaginaire $\psi\sqrt{-1}$, considéré isolément, ne peut jamais être compté à partir d'un rayon incliné sur l'axe transverse de l'hyperbole à laquelle ce secteur doit appartenir; l'origine de l'arc d'hyperbole qui correspond à un angle imaginaire isolé est toujours l'un des sommets de cette hyperbole.

La tangente d'un angle imaginaire sans partie réelle ne peut croître que de $-\sqrt{-1}$ à $+\sqrt{-1}$, lorsque l'angle lui-même croît de $-\infty\sqrt{-1}$ à $+\infty\sqrt{-1}$. L'inclinaison réelle qui correspond à un angle imaginaire $\pm\infty\sqrt{-1}$ n'est que de $\pm\frac{\pi}{4}$ ou $\pm 45°$.

L'inclinaison réelle μ correspondante à un angle imaginaire $\psi\sqrt{-1}$ serait fournie par l'équation

$$\operatorname{tang}(\psi\sqrt{-1}) = \sqrt{-1}\operatorname{tang}\mu,$$

qui donne

$$\frac{e^{-\psi}-e^{\psi}}{e^{-\psi}+e^{\psi}}=\sqrt{-1}\,\frac{e^{\mu\sqrt{-1}}-e^{-\mu\sqrt{-1}}}{e^{\mu\sqrt{-1}}+e^{-\mu\sqrt{-1}}},$$

d'où l'on tirerait facilement μ en fonction de ψ.

Mais le but que nous nous proposons est de faire intervenir directement l'angle imaginaire dans la solution de toutes les questions qui en exigent l'emploi, sans retourner jamais à l'angle réel correspondant.

150. *Des triangles imaginaires en général.* — La manière la plus convenable, parce qu'elle est la plus générale, de définir un triangle quelconque, réel ou imaginaire, est de donner les coordonnées de ses trois sommets.

$[x', y']$, $[x'', y'']$, $[x''', y''']$ désignant les coordonnées des trois sommets d'un triangle rapporté à des axes quelconques, faisant entre eux un angle θ, les mesures des côtés de ce triangle seront pour nous, par définition,

$$\sqrt{(x'-x'')^2+(y'-y'')^2+2(x'-x'')(y'-y'')\cos\theta},$$

$$\sqrt{(x'-x''')^2+(y'-y''')^2+2(x'-x''')(y'-y''')\cos\theta}$$

et

$$\sqrt{(x''-x''')^2+(y''-y''')^2+2(x''-x''')(y''-y''')\cos\theta};$$

les angles de ce triangle pourront être fournis, par exemple, par les formules

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A,$$

$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B,$$

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C,$$

qu'on pourrait remplacer, en tout ou en partie, et à volonté, par

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C},$$

ou toutes autres formules qui s'en déduiraient.

La surface sera

$$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)};$$

et de même, tous autres éléments constitutifs du triangle, tels que hauteurs, bissectrices, médianes, etc., seront fournis par les mêmes équations qui les donneraient dans un triangle réel.

La question ne consistera donc pas dans la détermination des éléments inconnus d'un triangle suffisamment défini, ou dans la résolution analytique de ce triangle, puisqu'elle se bornerait dès lors à la répétition de calculs déjà faits dans l'hypothèse de triangles réels : elle sera de donner à chacune des équations qui devraient entrer dans le calcul un sens précis et intelligible, qui fournisse l'expression de la condition graphique, correspondante, à laquelle devraient satisfaire les inconnues; de manière qu'il suffise ensuite de rapprocher les trois conditions propres à chaque groupe de données pour en déduire la règle à suivre dans la construction effective du triangle inconnu.

151. Mais la question même supposant la démonstration préalable de l'identité permanente du triangle et de ses éléments, nous devons d'abord établir cette identité.

Or, en premier lieu, si les axes viennent à changer d'une manière quelconque, les coordonnées nouvelles des trois sommets du triangle, tirées des formules vulgaires de transformation, fourniront toujours, on le sait, les trois mêmes points du plan; ce qui suffit pour établir l'identité graphique du triangle imaginaire, aussi bien que réel.

D'un autre côté, aucune transformation de coordonnées ne pourra jamais altérer les expressions algébriques ni des côtés, ni des angles, ni de la surface, ni de tous autres éléments du triangle, quelles que soient les données qui le déterminent.

Parce que d'abord l'identité de la chose, qui va de soi quand cette chose est réelle, entraîne nécessairement l'identité analytique de la formule, qui la représente, dans un mode quelconque; et qu'il suffit d'ailleurs de savoir que cette identité analytique subsiste pour toutes les valeurs réelles des variables contenues dans la formule, pour pouvoir affirmer qu'elle ne serait pas troublée par l'attribution à ces variables de valeurs imaginaires.

Il résulte de ce qui vient d'être dit que, quel que soit le triangle que nous ayons à étudier, nous pourrons toujours choisir les axes à volonté, sans risquer d'altérer la question en quoi que ce soit.

152. Comme nous l'avons dit précédemment, la définition des éléments inconnus d'un triangle imaginaire se trouve dans les formules mêmes qui doivent fournir ces éléments et qui les donneraient dans le cas analogue d'un triangle réel; il est donc bien entendu que ce sera toujours de ces formules qu'il faudra se servir pour résoudre le triangle proposé, mais l'usage à en faire doit être réglé par une restriction indispensable.

La plupart des formules de trigonométrie rectiligne attribuent en effet le double signe $\pm$ à toutes les inconnues qu'on en veut tirer. L'espèce d'ambiguïté qui en résulte ne présente aucun inconvénient lorsque le triangle doit être réel; mais elle subsisterait d'une manière fâcheuse dans le cas d'un triangle imaginaire, si l'on ne prenait soin de définir plus exactement cette figure.

De quelques formules qu'on se soit servi pour résoudre un triangle, il conviendra toujours de soumettre les résultats à la condition de vérifier les formules

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c},$$

$$A + B + C = \pi.$$

Si l'indétermination n'est pas alors complétement levée, elle n'affectera pas du moins chacun des éléments en particulier : elle portera sur tout le triangle.

En effet, si d'abord on donne deux angles et un côté, dans ce cas la condition $A + B + C = \pi$ déterminera le troisième angle sans ambiguïté; dès lors les numérateurs des rapports

$$\frac{\sin A}{a}, \quad \frac{\sin B}{b} \quad \text{et} \quad \frac{\sin C}{c}$$

étant connus ainsi que l'un des trois dénominateurs, les deux autres seront absolument déterminés.

Si l'on donne deux côtés et l'angle compris, on connaîtra la somme des deux autres angles, et, à la vérité, on pourra partager cette somme d'une infinité de manières en parties dont les sinus soient proportionnels aux deux côtés donnés, mais ce ne pourra être qu'en

ajoutant un multiple quelconque de π à l'un des angles inconnus et retranchant le même multiple à l'autre. Quant au troisième côté, il changera de signe ou reprendra son signe primitif, selon que l'on aura ajouté à l'un des angles inconnus et retranché à l'autre un multiple impair ou pair de π.

Si l'on donne deux côtés et l'angle opposé à l'un d'eux, les deux termes d'un même rapport étant déterminés, ainsi que le dénominateur d'un second rapport, le numérateur de ce second rapport sera complétement déterminé, mais les deux angles inconnus pourront encore être l'un augmenté, l'autre diminué d'un même multiple de π : par suite le troisième côté pourra changer de signe.

Enfin si l'on donne les trois côtés, pour que les égalités

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c},$$

$$A + B + C = \pi,$$

restassent satisfaites, on ne pourrait qu'augmenter l'un des trois angles d'un multiple de 2π, en diminuant les deux autres d'autres multiples de 2π qui formassent la même somme.

133. Les observations que nous venons de présenter conviennent à toutes les hypothèses ; mais nous nous bornerons ici à étudier le cas où les triangles en question, bien qu'imaginaires, seraient définis par des données réelles.

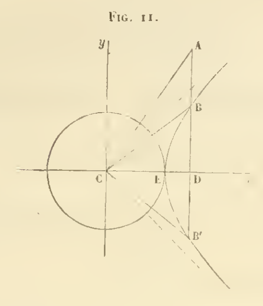
134. Les deux premiers cas où l'on donne soit un côté et les deux angles adjacents, soit deux côtés et l'angle compris, ne pouvant alors fournir de valeurs imaginaires pour les autres éléments du triangle, nous n'aurons pas pour le moment à nous en occuper.

Dans le troisième cas où l'on donne deux côtés et l'angle opposé à l'un d'eux, le triangle peut être imaginaire.

Soient CAD (*fig.* 11) l'angle donné, AC $= b$ celui des côtés donnés qui doit être adjacent à l'angle A, CD la perpendiculaire abaissée de C sur AB, enfin CE $= a$ celui des côtés donnés qui doit être opposé à l'angle A.

Le côté CE, qui doit être opposé à l'angle A, étant moindre que la

Fig. 11.



perpendiculaire CD, le triangle sera impossible.

Les formules

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

et

$$\frac{\sin C}{c} = \frac{\sin A}{a}$$

donnent

$$c = b\cos A \pm \sqrt{a^2 - b^2}\sin A$$

et

$$\sin C = \frac{b}{a}\sin A\cos A \pm \sin A\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}\sin^2 A};$$

sin C étant composé d'une partie réelle et d'une partie imaginaire, il en sera de même de C. Nous commencerons par déterminer la partie réelle de C. Pour cela, nous retrancherons de cet angle un angle réel φ tel, que $\sin(C - \varphi)$ n'ait plus de partie réelle :

$$\sin(C - \varphi) = \sin C\cos\varphi - \cos C\sin\varphi;$$

pour abréger le calcul, nous tirerons cos C de la formule

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab},$$

qui, en y remplaçant c par sa valeur, donne

$$\cos C = \frac{b}{a}\sin^2 A \mp \cos A \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}\sin^2 A}.$$

En substituant les valeurs de $\sin C$ et de $\cos C$, on trouve

$$\sin(C-\varphi) = \frac{b}{a}\sin A\cos A\cos\varphi - \frac{b}{a}\sin^2 A\sin\varphi$$
$$\pm\sqrt{-1}\,(\sin A\cos\varphi + \cos A\sin\varphi)\sqrt{\frac{b^2}{a^2}\sin^2 A - 1};$$

la condition qui détermine φ est donc

$$\frac{b}{a}\sin A\,(\cos A\cos\varphi - \sin A\sin\varphi) = 0,$$

qui donne

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - A.$$

Ainsi la partie réelle de C est $\frac{\pi}{2} - A$; quant à la partie imaginaire $\psi\sqrt{-1}$, elle est donnée par l'équation

$$\sin\psi\sqrt{-1} = \sin(C-\varphi) = \pm\sqrt{-1}\sqrt{\frac{b^2}{a^2}\sin^2 A - 1}.$$

L'interprétation de ces résultats est facile à former : La circonférence décrite du point C comme centre, avec a pour rayon, ne coupant plus la droite AB, elle a été suppléée par celle des hyperboles équilateres, de même centre et de même rayon, qui pouvait, comme la circonférence, couper AB en deux points symétriquement placés par rapport à D, c'est-à-dire par l'hyperbole ayant son sommet en E; de telle sorte que cette hyperbole coupant AB en B et B', le troisième sommet du triangle est B ou B', le troisième côté C est $AD \pm DB\sqrt{-1}$, l'angle C est

$$ACD \pm 2\frac{\text{secteur CEB}}{a^2}\sqrt{-1},$$

et enfin l'angle B est

$$\pi - \widehat{ACD} \mp 2\frac{\text{secteur CEB}}{a^2}\sqrt{-1}.$$

En effet, si nous prenons pour axe des x la droite CD et pour axe des y une perpendiculaire à CD, au point C, l'équation de l'hyperbole dont il s'agit sera

$$y^2 - x^2 = -a^2,$$

d'un autre côté, l'équation de AB sera

$$x = b \sin A,$$

BD sera donc égal à $\sqrt{b^2 \sin^2 A - a^2}$; ainsi, puisque

$$c = b \cos A \pm \sqrt{a^2 - b^2 \sin^2 A},$$

sa valeur est bien $AD \pm BD\sqrt{-1}$; quant à l'angle C, nous avons déjà vu qu'il a pour partie réelle ACD, et que le sinus de sa partie imaginaire est $\pm\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}\sin^2 A}$, ou $\frac{DB}{a}\sqrt{-1}$: mais $\frac{DB}{a}\sqrt{-1}$ est aussi le sinus de $2\frac{\text{secteur CEB}}{a^2}\sqrt{-1}$; par conséquent

$$C = \widehat{ACD} \pm 2\frac{\text{secteur CEB}}{a^2}\sqrt{-1}.$$

La surface du triangle considéré, donnée par la formule

$$\frac{bc}{2}\sin A,$$

est évidemment

$$ACD \pm DCB\sqrt{-1}.$$

En sorte que si, dans l'expression analytique de cette surface, on remplace $\sqrt{-1}$ par 1, il reste l'expression de la surface du même triangle supposé réel.

155. Supposons maintenant qu'on donne les trois côtés d'un

triangle et que l'un d'eux se trouve plus grand que la somme des autres

$$a > b + c.$$

Soient (*fig.* 12) $BC = a$, $BD = c$, $CE = b$. Les deux circonférences décrites des points B et C comme centres avec c et b pour rayons ne se

Fig. 12.

coupant plus, seront suppléées par celles de leurs conjuguées hyperboliques qui peuvent se couper en deux points symétriquement placés par rapport à BC.

En effet, les formules donnent

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

et

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab};$$

or on va voir que ces quantités sont bien les rapports $\frac{BF}{BD}$ et $\frac{CF}{CE}$, c'est-à-dire les cosinus des angles

$$2\frac{\text{secteur BDA}}{c^2}\sqrt{-1}$$

et

$$2\frac{\text{secteur CEA}}{b^2}\sqrt{-1}.$$

En effet, si l'on prend BC pour axe des x et pour axe des y la perpen-

diculaire à BC élevée au point B, les équations des deux hyperboles seront

$$y^2 - x^2 = -c^2$$

et

$$y^2 - (x-a)^2 = -b^2,$$

en sorte que l'abscisse du point de rencontre, ou BF, sera

$$\frac{a^2+c^2-b^2}{2a},$$

et que, par suite, $\frac{\mathrm{BF}}{\mathrm{BD}}$ sera

$$\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}:$$

d'un autre côté,

$$\mathrm{CF} = a - \frac{a^2+c^2-b^2}{2a} = \frac{a^2+b^2-c^2}{2a},$$

et ainsi

$$\frac{\mathrm{CF}}{\mathrm{CE}} = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.$$

Le triangle imaginaire cherché est donc bien BAC; les angles B et C sont

$$2\,\frac{\text{secteur BDA}}{c^2}\sqrt{-1} \quad \text{et} \quad 2\,\frac{\text{secteur CE}a}{b^2}\sqrt{-1},$$

et l'angle $\mathrm{A} = \pi - \mathrm{B} - \mathrm{C}$.

Quant à l'expression analytique de la surface de ce triangle, elle est

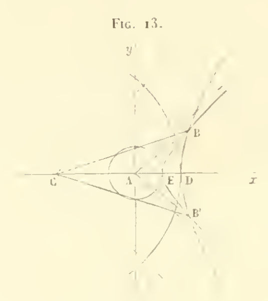
$$\frac{ac\sin\mathrm{B}}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{ac}{2}\,\frac{\mathrm{AF}\sqrt{-1}}{c} \quad \text{ou} \quad \frac{a}{2}\cdot\mathrm{AF}.\sqrt{-1},$$

et si l'on y remplace $\sqrt{-1}$ par 1, elle donne la surface du même triangle supposé réel.

Si l'on avait pris pour base des constructions l'un des petits côtés, b par exemple, l'interprétation des résultats du calcul se serait faite de la même manière.

Si (*fig.* 13), $AC = b$, $CD = a$, $AE = c$, les deux circonférences dé-

Fig. 13.



crites des points A et C comme centres avec c et a pour rayons seront suppléées par les hyperboles équilatères BEB′, BDB′ et le troisième sommet du triangle sera en B ou en B′.

SUR LA FORME
$x^2 + y^2 + 2z^2 + 4t^2$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

---

1. Étant donné un entier n pair ou impair (que nous représenterons par $2^\alpha m$, m étant impair et l'exposant α pouvant se réduire à zéro), on demande le nombre N des représentations propres ou impropres de n par la forme

$$x^2 + y^2 + 2z^2 + 4t^2,$$

et aussi le nombre M des seules représentations propres. Or il arrive ici (comme dans d'autres cas déjà traités) que N dépend de la fonction numérique $\omega_1(m)$ définie, au moyen des diviseurs conjugués d, δ de l'entier impair $m = d\delta$, par la formule

$$\omega_1(m) = \sum (-1)^{\frac{\delta^2-1}{8}} d,$$

tandis que M se déduit de la fonction $O_1(m)$ exprimée par le produit

$$\prod \left[p^\mu + (-1)^{\frac{p^2-1}{8}} p^{\mu-1}\right],$$

où p est un facteur premier quelconque de m, μ le nombre de fois que p divise m. Pour $m = 1$, on fait naturellement $O_1(m) = 1$.

2. Soit d'abord n impair, $n = m$. Je trouve que l'on a alors

$$N = 4\omega_1(m)$$

et

$$M = 4\text{O}_1(m),$$

quelle que soit la forme linéaire de m.

Au contraire, pour n pair, $n = 2^\alpha m$, $\alpha > 0$, l'on a

$$N = 2(2^{\alpha+1} - 1)\,\omega_1(m)$$

si $m = 8k \pm 1$, mais

$$N = 2(2^{\alpha+1} + 1)\,\omega_1(m)$$

si $m = 8k \pm 3$. La forme linéaire de m influe donc cette fois sur N. Elle influe également sur M lorsque $\alpha = 1$ ou 2, mais non pour $\alpha > 2$.

Quand $\alpha = 1$, c'est-à-dire quand n est impairement pair, $n = 2m$, il vient

$$M = 6\text{O}_1(m)$$

si $m = 8k \pm 1$, mais

$$M = 10\text{O}_1(m)$$

si $m = 8k \pm 3$.

Quand $\alpha = 2$, c'est-à-dire quand n est divisible par 4, non par 8, $n = 4m$, on a

$$M = 10\text{O}_1(m)$$

si $m = 8k \pm 1$, mais

$$M = 14\text{O}_1(m)$$

si $m = 8k \pm 3$.

Enfin pour $\alpha > 2$, on retrouve une formule unique :

$$M = 3.2^\alpha\text{O}_1(m).$$

5. Soit, comme premier exemple, $n = m = 9$. On aura, par nos formules,

$$N = 4\omega_1(9) = 28$$

et

$$M = 4\text{O}_1(m) = 24.$$

Or, par les équations

$$9 = (\pm 1)^2 + (\pm 2)^2 + 2.0^2 + 4(\pm 1)^2,$$
$$9 = (\pm 2)^2 + (\pm 1)^2 + 2.0^2 + 4(\pm 1)^2,$$
$$9 = (\pm 1)^2 + 0^2 + 2(\pm 2)^2 + 4.0^2,$$
$$9 = 0^2 + (\pm 1)^2 + 2(\pm 2)^2 + 4.0^2,$$

nous avons en effet vingt-quatre représentations propres du nombre 9, à quoi viennent s'adjoindre quatre représentations impropres, puisque l'on a

$$9 = (\pm 3)^2 + 0^2 + 2.0^2 + 4.0^2$$

et

$$9 = 0^2 + (\pm 3)^2 + 2.0^2 + 4.0^2.$$

Soit à présent $n = 4 = 2^2.1$, d'où $m = 1$, $\alpha = 2$. Le nombre 1 appartient à la forme linéaire $8k + 1$, et l'on a

$$\omega_1(1) = 1, \quad O_1(1) = 1.$$

Nos formules donneront donc ici :

$$N = 2(2^3 - 1) = 14$$

et

$$M = 10.$$

Or, par les équations

$$4 = (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + 2(\pm 1)^2 + 4.0^2,$$
$$4 = 0^2 + 0^2 + 2.0^2 + 4(\pm 1)^2,$$

nous avons d'abord dix représentations propres, puis par les équations

$$4 = (\pm 2)^2 + 0^2 + 2.0^2 + 4.0^2,$$
$$4 = 0^2 + (\pm 2)^2 + 2.0^2 + 4.0^2,$$

quatre représentations impropres, qui complètent le nombre 14.

Soit enfin $n = 20 = 2^2.5$. Comme 5 est de la forme $8k - 3$, nos

formules donneront cette fois

$$N = 2(2^3 + 1)\,\omega_1(5) = 72$$

et

$$M = 14\,O_1(5) = 56.$$

Or c'est ce que confirment les deux groupes de décompositions :

$$20 = 3^2 + 3^2 + 2.1^2 + 4.0^2,$$
$$20 = 1^2 + 1^2 + 2.3^2 + 4.0^2,$$
$$20 = 4^2 + 0^2 + 2.0^2 + 4.1^2,$$
$$20 = 2^2 + 2^2 + 2.2^2 + 4.1^2,$$
$$20 = 1^2 + 1^2 + 2.1^2 + 4.2^2,$$

et

$$20 = 2^2 + 4^2 + 2.0^2 + 4.0^2,$$
$$20 = 2^2 + 0^2 + 2.0^2 + 4.2^2,$$

si l'on a soin d'y marquer du double signe les racines des carrés qui ne sont pas nuls et d'y effectuer les permutations convenables.

SUR LA FORME

$x^2+y^2+4z^2+8t^2$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

La forme

$$x^2+y^2+4z^2+8t^2,$$

que nous voulons considérer ici, est liée intimement à la forme

$$x^2+y^2+2z^2+4t^2,$$

dont il a été question dans l'article précédent. Nous aurons de nouveau à employer les fonctions numériques $\omega_1(m)$, $O_1(m)$, et voici comment on trouvera, suivant les cas, le nombre N des représentations propres ou impropres comme aussi le nombre M des représentations propres de n ou $2^\alpha m$ par la forme actuelle

$$x^2+y^2+4z^2+8t^2.$$

1° Pour n impair, $n=m$, on aura

$$N=4\omega_1(m),\quad M=4O_1(m),$$

si $m=4l+1$, mais

$$N=0,\quad M=0,$$

si $m=4l+3$.

2° Pour n simplement pair, $n=2m$, on aura

$$N=4\omega_1(m),\quad M=4O_1(m),$$

quelle que soit la forme linéaire de m.

3° Pour n pairement pair, $n = 2^\alpha m$, $\alpha > 1$, on a

$$N = 2(2^\alpha - 1)\,\omega_1(m)$$

si $m = 8k \pm 1$, mais

$$N = 2(2^\alpha + 1)\,\omega_1(m)$$

si $m = 8k \pm 3$. Quant à la valeur de M, il faut distinguer les trois cas de $\alpha = 2$, $\alpha = 3$, $\alpha > 3$.

Pour $\alpha = 2$, $n = 4m$, on a

$$M = 2\,O_1(m)$$

si $m = 8k + 1$, mais

$$M = 6\,O_1(m)$$

si $m = 8k - 1$ ou $8k - 3$, enfin

$$M = 10\,O_1(m)$$

si $m = 8k + 3$.

Pour $\alpha = 3$, $n = 8m$, on a

$$M = 10\,O_1(m)$$

si $m = 8k \pm 1$, mais

$$M = 14\,O_1(m)$$

si $m = 8k \pm 3$.

Enfin pour $n = 2^\alpha m$, avec $\alpha > 3$, on a généralement

$$M = 3.2^{\alpha-1}\,O_1(m),$$

quelle que soit la forme linéaire de m.

SUR LA FORME

$x^2 + 4y^2 + 16z^2 + 16t^2$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

1. Étant donné un entier n pair ou impair (que nous représenterons par $2^\alpha m$, m étant impair et l'exposant α pouvant se réduire à zéro), on demande le nombre N des représentations de n par la forme

$$x^2 + 4y^2 + 16z^2 + 16t^2,$$

c'est-à-dire le nombre N des solutions de l'équation indéterminée

$$n = x^2 + 4y^2 + 16z^2 + 16t^2,$$

où x, y, z, t sont des entiers indifféremment positifs, nuls ou négatifs.

Il est bien clair que l'on a $N = 0$ quand n est impair et de la forme $4l + 3$, comme aussi quand n est impairement pair, $n = 2m$. On a encore $N = 0$ quand $n = 4(4l + 3)$. Mais dans tous les autres cas la valeur de N est > 0, et on l'obtient à priori ainsi que je vais l'expliquer.

2. Soit d'abord n impair, $n = m$ (bien entendu $m = 4l + 1$). Il faudra considérer, avec la somme $\zeta_1(m)$ des diviseurs de m, cette autre somme

$$\sum (-1)^{\frac{i-1}{2}} i,$$

où i désigne successivement tous les nombres entiers positifs figurant dans l'équation

$$m = i^2 + 4s^2 :$$

on prend l'entier s positif, nul ou négatif. On a

$$N = \frac{1}{2}\left[\zeta_1(m) + 3\sum(-1)^{\frac{i-1}{2}} i\right]$$

si $m = 8k + 1$, mais

$$N = \frac{1}{2}\left[\zeta_1(m) + \sum(-1)^{\frac{i-1}{2}} i\right]$$

si $m = 8k + 5$.

Pour les nombres $8k + 1$, soit d'abord $m = 1 = 1^2 + 4.0^2$; il nous viendra

$$N = \frac{1}{2}(1 + 3) = 2,$$

et cela s'accorde avec l'équation

$$1 = (\pm 1)^2 + 4.0^2 + 16.0^2 + 16.0^2,$$

qui fournit deux représentations.

Soit ensuite $m = 9 = 3^2 + 4.0^2$. On aura

$$N = \frac{1}{2}(13 - 9) = 2,$$

et en effet il n'y a cette fois encore que deux représentations exprimées par l'équation

$$9 = (\pm 3)^2 + 4.0^2 + 16.0^2 + 16.0^2.$$

Soit enfin $m = 17 = 1^2 + 4(\pm 2)^2$. Il nous viendra

$$N = \frac{1}{2}(18 + 6) = 12.$$

Les équations

$$17 = (\pm 1)^2 + 4(\pm 2)^2 + 16.0^2 + 16.0^2,$$
$$17 = (\pm 1)^2 + 4.0^2 + 16(\pm 1)^2 + 16.0^2,$$
$$17 = (\pm 1)^2 + 4.0^2 + 16.0^2 + 16(\pm 1)^2,$$

confirment ce fait.

Pour les nombres $8k+5$, soit $m=5=1^2+4(\pm 1)^2$. Notre formule donnera

$$N=\frac{1}{2}(6+2)=4,$$

ce qui s'accorde avec l'équation

$$5=(\pm 1)^2+4(\pm 1)^2+16.0^2+16.0^2,$$

où l'on trouve quatre représentations.

Soit encore $m=13=3^2+4(\pm 1)^2$. Il nous viendra

$$N=\frac{1}{2}(14-6)=4,$$

et en effet le nombre 13 a quatre représentations fournies par l'équation

$$13=(\pm 3)^2+4(\pm 1)^2+16.0^2+16.0^2.$$

Soit enfin $m=21$. L'équation

$$21=i^2+4s^2$$

étant impossible, on a simplement

$$N=\frac{1}{2}\zeta_1(21)=16,$$

et 21 a bien seize représentations contenues dans les deux équations

$$21=(\pm 1)^2+4(\pm 1)^2+16(\pm 1)^2+16.0^2,$$
$$21=(\pm 1)^2+4(\pm 1)^2+16.0^2+16(\pm 1)^2.$$

5. Soit à présent n pairement pair, $n=2^\alpha m$, $\alpha>1$. Il est clair que dans l'équation

$$2^\alpha m=x^2+4y^2+16z^2+16t^2$$

x devra être pair. Soit donc $x=2x_1$. En divisant par 4, nous aurons

$$2^{\alpha-2}m=x_1^2+y^2+4(z^2+t^2).$$

Or cette équation a été discutée d'avance (dans le cahier de septembre 1860). Il en résulte, pour le nombre N des représentations de n par la forme

$$x^2 + 4y^2 + 16z^2 + 16t^2,$$

qui nous occupe ici, les conclusions suivantes.

1° Pour n divisible par 4, non par 8, $n = 4m$, on a

$$N = 4\zeta_1(m)$$

quand $m = 4l + 1$. J'ai déjà dit que $N = 0$ quand $m = 4l + 3$. Ainsi pour $n = 4$, on a quatre représentations : elles sont fournies par les équations

$$4 = (\pm 2)^2 + 4.0^2 + 16.0^2 + 16.0^2,$$
$$4 = 0^2 + 4(\pm 1)^2 + 16.0^2 + 16.0^2.$$

2° Pour n divisible par 8, non par 16, $n = 8m$, on a

$$N = 4\zeta_1(m),$$

quelle que soit la forme linéaire de m. Ainsi le nombre 8 a les quatre représentations exprimées par

$$8 = (\pm 2)^2 + 4(\pm 1)^2 + 16.0^2 + 16.0^2.$$

3° Mais pour n divisible par 16, non par 32, il vient

$$N = 8\zeta_1(m).$$

Ainsi 16 a huit représentations : elles sont fournies par les équations

$$16 = (\pm 4)^2 + 4.0^2 + 16.0^2 + 16.0^2,$$
$$16 = 0^2 + 4(\pm 2)^2 + 16.0^2 + 16.0^2,$$
$$16 = 0^2 + 4.0^2 + 16(\pm 1)^2 + 16.0^2,$$
$$16 = 0^2 + 4.0^2 + 16.0^2 + 16(\pm 1)^2.$$

4° Enfin pour n divisible par 32, $n = 2^\alpha m$, $\alpha > 4$, on a la formule unique

$$N = 24\zeta_1(m),$$

si grand que α puisse devenir.

SUR LA FORME
$x^2 + y^2 + 8z^2 + 8t^2$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

1. Étant donné un entier n pair ou impair (que nous représenterons par $2^\alpha m$, m étant impair et l'exposant α pouvant se réduire à zéro), on demande le nombre N des représentations de n par la forme

$$x^2 + y^2 + 8z^2 + 8t^2,$$

c'est-à-dire le nombre N des solutions de l'équation indéterminée

$$n = x^2 + y^2 + 8z^2 + 8t^2,$$

où x, y, z, t sont des entiers indifféremment positifs, nuls ou négatifs. On va voir que cette fois encore N dépend de la somme $\zeta_1(m)$ des diviseurs de m et de la somme

$$\sum (-1)^{\frac{i-1}{2}} i$$

relative aux entiers positifs i figurant dans l'équation

$$m = i^2 + 4s^2,$$

où l'entier s, quand il n'est pas zéro, doit être pris négativement comme positivement.

2. Soit d'abord n impair, $n = m$. Il est clair que l'on a $N = 0$, si m est de la forme $4l + 3$, qui comprend ces deux autres $8k + 3$, $8k + 7$. Mais il n'en est pas de même pour $m = 4l + 1$, c'est-à-dire

pour m de l'une des deux formes $8k+1$, $8k+5$. Je trouve

$$N = 2\zeta_1(m) + 2\sum(-1)^{\frac{i-1}{2}} i$$

si $m = 8k+1$, et

$$N = 2\zeta_1(m) - 2\sum(-1)^{\frac{i-1}{2}} i$$

si $m = 8k+5$.

Le cas de $m = 1 = 1^2 + 4.0^2$ se rapporte à la première formule, qui donne alors

$$N = 2 + 2 = 4,$$

et l'on a, en effet, les quatre représentations fournies par les équations

$$1 = (\pm 1)^2 + 0^2 + 8.0^2 + 8.0^2,$$
$$1 = 0^2 + (\pm 1)^2 + 8.0^2 + 8.0^2.$$

Soit ensuite $m = 9 = 3^2 + 4.0^2$. Il viendra

$$N = 2.13 - 2.3 = 20,$$

et l'on trouve bien, pour le nombre 9, vingt représentations, au moyen des équations

$$9 = 1^2 + 0^2 + 8.1^2 + 8.0^2,$$
$$9 = 3^2 + 0^2 + 8.0^2 + 8.0^2,$$

où l'on affectera du signe $\pm$ les racines des carrés qui ne sont pas nuls et où l'on opérera les permutations convenables.

Soit enfin $m = 17 = 1^2 + 4(\pm 1)^2$. On aura

$$N = 2.18 + 2.2 = 40.$$

La vérification est facile au moyen des équations

$$17 = 1^2 + 4^2 + 8.0^2 + 8.0^2,$$
$$17 = 1^2 + 0^2 + 8.1^2 + 8.1^2,$$
$$17 = 3^2 + 0^2 + 8.1^2 + 8.0^2.$$

Soit à présent $m = 5 = 1^2 + 4(\pm 1)^2$. C'est la seconde formule qu'on devra appliquer, et elle donnera

$$N = 2.6 - 2.2 = 8,$$

ce qui s'accorde avec les équations

$$5 = (\pm 1)^2 + (\pm 2)^2 + 8.0^2 + 8.0^2,$$
$$5 = (\pm 2)^2 + (\pm 1)^2 + 8.0^2 + 8.0^2.$$

Soit encore $m = 13 = 3^2 + 4(\pm 1)^2$. Il nous viendra

$$N = 2.14 + 2.6 = 40.$$

Or on trouve effectivement quarante représentations du nombre 13 au moyen des équations

$$13 = 3^2 + 2^2 + 8.0^2 + 8.0^2,$$
$$13 = 1^2 + 2^2 + 8.1^2 + 8.0^2.$$

Je ne pousserai pas plus loin ces exercices numériques.

5. Prenons actuellement n impairement pair, $n = 2m$. On aura

$$N = 0$$

si $m = 4l + 3$, mais

$$N = 4\zeta_1(m)$$

si $m = 4l + 1$.

Ainsi pour $n = 2$, on a $N = 4$. C'est ce que confirme l'équation

$$2 = (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + 8.0^2 + 8.0^2,$$

qui donne quatre représentations du nombre 2.

Pour $n = 10$, on a $N = 24$. Or on obtient en effet vingt-quatre représentations du nombre 10, au moyen des équations ci-après :

$$10 = 1^2 + 3^2 + 8.0^2 + 8.0^2,$$
$$10 = 1^2 + 1^2 + 8.1^2 + 8.0^2.$$

4. Soit enfin n multiple de 4. L'équation

$$2^{\alpha} m = x^2 + y^2 + 8z^2 + 8t^2$$

ne pourra exister alors qu'en prenant x et y pairs, $x = 2x_1$, $y = 2y_1$, d'où

$$2^{\alpha-2} m = x_1^2 + y_1^2 + 2z^2 + 2t^2,$$

ce qui nous ramène à une équation discutée déjà (dans le cahier de juillet 1860). Il en résulte, pour le nombre N des représentations d'un entier n pairement pair, par la forme

$$x^2 + y^2 + 8z^2 + 8z^2,$$

qui nous occupe ici, les conséquences suivantes.

Pour n divisible par 4, non par 8, $n = 4m$, on a

$$N = 4\zeta_1(m).$$

Ainsi le nombre 4 doit avoir quatre représentations. Elles sont fournies par les deux équations

$$4 = (\pm 2)^2 + 0^2 + 8.0^2 + 8.0^2,$$
$$4 = 0^2 + (\pm 2)^2 + 8.0^2 + 8.0^2.$$

Pour n divisible par 8, non par 16, $n = 8m$, on a

$$N = 8\zeta_1(m).$$

Ainsi le nombre 8 doit avoir huit représentations. Cela s'accorde avec les équations

$$8 = (\pm 2)^2 + (\pm 2)^2 + 8.0^2 + 8.0^2,$$
$$8 = 0^2 + 0^2 + 8(\pm 1)^2 + 8.0^2,$$
$$8 = 0^2 + 0^2 + 8.0^2 + 8(\pm 1)^2.$$

Enfin pour n divisible par 16, $n = 2^{\alpha} m$, $\alpha > 3$, on a toujours

$$N = 24\zeta_1(m),$$

si grand que α puisse devenir.

SUR LA FORME
$x^2 + 4y^2 + 8z^2 + 8t^2$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

1. La détermination du nombre N des représentations d'un entier donné n (ou $2^\alpha m$, m impair, $\alpha = 0, 1, 2, \ldots$) par la forme

$$x^2 + 4y^2 + 8z^2 + 8t^2,$$

dépend, elle aussi, de la somme $\zeta_1(m)$ des diviseurs de m, et de cette autre somme

$$\sum (-1)^{\frac{i-1}{2}} i,$$

relative aux nombres entiers positifs i qui peuvent figurer dans l'équation

$$m = i^2 + 4s^2,$$

où l'entier s est indifféremment positif, nul ou négatif.

Il est évident que l'on a $N = 0$ quand n est impair et de la forme $4l + 3$, comme aussi lorsque n est impairement pair, $n = 2m$. Les autres cas doivent donc seuls nous occuper.

2. Soit d'abord n impair de la forme $4l + 1$, $n = m = 4l + 1$: on aura

$$N = \zeta_1(m) + \sum (-1)^{\frac{i-1}{2}} i$$

si $m = 8k + 1$, mais

$$N = \zeta_1(m) - \sum (-1)^{\frac{i-1}{2}} i$$

si $m = 8k + 5$.

Soit, par exemple, $m = 1$. C'est la première formule qu'il faudra employer : elle donnera

$$N = 2,$$

et cela s'accorde avec l'équation

$$1 = (\pm 1)^2 + 4.0^2 + 8.0^2 + 8.0^2,$$

qui fournit deux représentations.

Soit ensuite $m = 9$. Il nous viendra

$$N = 13 - 3 = 10.$$

Or le nombre 9 a en effet dix représentations, contenues dans ces trois équations

$$9 = (\pm 3)^2 + 4.0^2 + 8.0^2 + 8.0^2,$$
$$9 = (\pm 1)^2 + 4.0^2 + 8(\pm 1)^2 + 8.0^2,$$
$$9 = (\pm 1)^2 + 4.0^2 + 8.0^2 + 8(\pm 1)^2.$$

Soit enfin $m = 17$. Nous aurons

$$N = 18 + 2 = 20.$$

Or on trouve pour le nombre 17 vingt représentations, au moyen des équations

$$17 = (\pm 1)^2 + 4(\pm 2)^2 + 8.0^2 + 8.0^2,$$
$$17 = (\pm 1)^2 + 4.0^2 + 8(\pm 1)^2 + 8(\pm 1)^2,$$
$$17 = (\pm 3)^2 + 4.0^2 + 8(\pm 1)^2 + 8.0^2,$$
$$17 = (\pm 3)^2 + 4.0^2 + 8.0^2 + 8(\pm 1)^2.$$

Notre première formule est donc vérifiée.

Passons à la seconde, c'est-à-dire aux entiers $8k + 5$. Et d'abord soit $m = 5$. Nous trouverons

$$N = 6 - 2 = 4.$$

Or l'équation

$$5 = (\pm 1)^2 + 4(\pm 1)^2 + 8.0^2 + 8.0^2$$

fournit effectivement quatre représentations.

Soit ensuite $m = 13$. Il nous viendra

$$N = 14 + 6 = 20.$$

Or je trouve pour le nombre 13 vingt représentations au moyen des équations

$$13 = (\pm 3)^2 + 4(\pm 1)^2 + 8.0^2 + 8.0^2,$$
$$13 = (\pm 1)^2 + 4(\pm 1)^2 + 8(\pm 1)^2 + 8.0^2,$$
$$13 = (\pm 1)^2 + 4(\pm 1)^2 + 8.0^2 + 8(\pm 1)^2.$$

Je ne pousserai pas plus loin ces vérifications.

5. Maintenant soit n pairement pair, $n = 2^\alpha m$, $\alpha > 1$. L'équation

$$2^\alpha m = x^2 + 4y^2 + 8z^2 + 8t^2$$

ne pourra avoir lieu qu'en prenant x pair. Soit donc

$$x = 2x_1,$$

partant

$$2^\alpha m = 4x_1^2 + 4y^2 + 8z^2 + 8t^2.$$

En divisant par 4, on retombera sur l'équation

$$2^{\alpha-2} m = x_1^2 + y_1^2 + 2(z^2 + t^2),$$

discutée déjà (dans le cahier de juillet 1860).

Nous serons donc conduits, pour le nombre N des représentations d'un nombre pairement pair, n ou $2^\alpha m$, par la forme

$$x^2 + 4y^2 + 8z^2 + 8t^2,$$

qui nous occupe ici, aux conclusions suivantes.

1° Pour n divisible par 4, non par 8, $n = 4m$, on a

$$N = 4\zeta_1(m).$$

Ainsi le nombre 4 a quatre représentations. Elles sont fournies par les équations

$$4 = (\pm 2)^2 + 4.0^2 + 8.0^2 + 8.0^2,$$
$$4 = 0^2 + 4(\pm 1)^2 + 8.0^2 + 8.0^2.$$

2° Pour n divisible par 8, non par 16, $n = 8m$, on a

$$N = 8\zeta_1(m).$$

Ainsi le nombre 8 doit avoir huit représentations. Les équations

$$8 = (\pm 2)^2 + 4(\pm 1)^2 + 8.0^2 + 8.0^2,$$
$$8 = 0^2 + 4.0^2 + 8(\pm 1)^2 + 8.0^2,$$
$$8 = 0^2 + 4.0^2 + 8.0^2 + 8(\pm 1)^2,$$

vérifient ce fait.

3° Pour n divisible par 16, $n = 2^\alpha m$, $\alpha > 3$, on a

$$N = 24\zeta_1(m),$$

quelque grand que α puisse devenir.

La forme linéaire de m n'influe, comme on voit, sur l'expression de N, que quand il s'agit des représentations d'un nombre impair. On n'a point à la prendre en considération quand on s'occupe d'un nombre pair.

SUR LA FORME

$x^2+y^2+16z^2+16t^2$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

1. Cette forme se rattache aux précédentes. Prenant donc un entier n pair ou impair que nous représenterons par $2^\alpha m$, m étant impair et l'exposant α pouvant se réduire à zéro, nous aurons à considérer la somme $\zeta_1(m)$ des diviseurs de m et une autre somme

$$\sum(-1)^{\frac{i-1}{2}}i,$$

relative aux entiers positifs i qui peuvent figurer dans l'équation

$$m=i^2+4s^2,$$

où l'entier s est indifféremment positif, nul ou négatif. C'est de ces deux fonctions numériques que dépend le nombre N des représentations de n par la forme

$$x^2+y^2+16z^2+16t^2,$$

et voici comment on peut calculer dans chaque cas donné ce nombre N.

2. Soit d'abord n impair, $n=m$. Il est évident que l'on a $N=0$, si m est de la forme $4l+3$. Il n'en est pas de même quand m est de la forme $4l+1$, qui comprend ces deux autres $8k+1$, $8k+5$. On a

$$N=\zeta_1(m)+3\sum(-1)^{\frac{i-1}{2}}i$$

si $m = 8k + 1$, et

$$N = \zeta_1(m) + \sum (-1)^{\frac{i-1}{2}} i$$

si $m = 8k + 5$.

C'est la première de ces deux formules que l'on doit employer pour $m = 1$. Elle donne alors

$$N = 4;$$

et cela s'accorde avec les deux équations

$$1 = (\pm 1)^2 + 0^2 + 16.0^2 + 16.0^2,$$
$$1 = 0^2 + (\pm 1)^2 + 16.0^2 + 16.0^2,$$

dont chacune fournit deux représentations.

Pour $m = 9$, il vient

$$N = 13 - 3.3 = 4;$$

et c'est ce qui est vérifié par les équations

$$9 = (\pm 3)^2 + 0^2 + 16.0^2 + 16.0^2,$$
$$9 = 0^2 + (\pm 3)^2 + 16.0^2 + 16.0^2.$$

Enfin pour $m = 17$, on a

$$N = 18 + 6 = 24.$$

Or les équations

$$17 = 1^2 + 4^2 + 16.0^2 + 16.0^2,$$
$$17 = 1^2 + 0^2 + 16.1^2 + 16.0^2,$$

donnent en effet pour le nombre 17 vingt-quatre représentations si l'on affecte du double signe $\pm$ les racines des carrés qui ne sont pas nuls et si l'on opère les permutations convenables.

5. Soit actuellement n impairement pair, $n = 2m$. On aura encore $N = 0$ si $m = 4l + 3$. Mais si m est de la forme $4l + 1$, on distinguera deux cas.

On aura

$$N = 2\zeta_1(m) + 2\sum(-1)^{\frac{i-1}{2}} i$$

si $m = 8k + 1$, mais

$$N = 2\zeta_1(m) - 2\sum(-1)^{\frac{i-1}{2}} i$$

si $m = 8k + 5$.

Ainsi le nombre 2 a quatre représentations contenues dans l'équation

$$2 = (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + 16.0^2 + 16.0^2;$$

et le nombre 10 en a huit, qui répondent aux équations ci-après :

$$10 = (\pm 1)^2 + (\pm 3)^2 + 16.0^2 + 16.0^2,$$
$$10 = (\pm 3)^2 + (\pm 1)^2 + 16.0^2 + 16.0^2.$$

4. Prenons enfin n pairement pair, $n = 2^\alpha m$, $\alpha > 1$. L'équation

$$2^\alpha m = x^2 + y^2 + 16z^2 + 16t^2$$

ne pouvant alors subsister qu'avec x et y pairs, on aura $x = 2x_1$, $y = 2y_1$, partant

$$2^{\alpha-2} m = x_1^2 + y_1^2 + 4(z^2 + t^2),$$

de sorte qu'on retrouvera une équation déjà discutée (dans le cahier de septembre 1860). On est ainsi conduit, pour le nombre N des représentations d'un nombre pairement pair, n ou $2^\alpha m$, par la forme

$$x^2 + y^2 + 16z^2 + 16t^2,$$

qui nous occupe ici, aux conséquences suivantes.

1° Pour n divisible par 4, non par 8, $n = 4m$, on a $N = 0$ si $m = 4l + 3$. Mais

$$N = 4\zeta_1(m)$$

si $m = 4l + 1$.

Ainsi le nombre 4 a quatre représentations, fournies par les deux équations

$$4 = (\pm 2)^2 + 0^2 + 16.0^2 + 16.0^2,$$
$$4 = 0^2 + (\pm 2)^2 + 16.0^2 + 16.0^2.$$

2° Pour n divisible par 8, non par 16, $n = 8m$, quelle que soit la forme linéaire de m, on a

$$N = 4\zeta_1(m).$$

3° Pour n divisible par 16, non par 32, $n = 16m$, on a également une seule formule :

$$N = 8\zeta_1(m).$$

4° Enfin pour n divisible par 32, $n - 2^\alpha m$, $\alpha > 4$, on a invariablement

$$N = 24\zeta_1(m),$$

quelle que soit la forme linéaire de m et quelque grand que l'exposant α puisse devenir.

SUR LES

ARCS DES COURBES PLANES OU SPHÉRIQUES

CONSIDÉRÉES COMME ENVELOPPES DE CERCLES;

PAR M. MANNHEIM.

Les arcs des ovales de Descartes dépendent en général d'une transcendante compliquée. M. William Roberts a fait voir que *la différence des arcs de cette courbe compris entre deux rayons vecteurs issus d'un foyer est exprimable en arc d'ellipse* [*]. Pour arriver à ce théorème, M. Roberts examine les courbes représentées par l'équation polaire

$$r^2 - 2r\Omega + \alpha = 0, \tag{1}$$

où Ω désigne une fonction quelconque de l'angle polaire ω, α une quantité constante, et calcule la somme et la différence des arcs compris entre deux rayons vecteurs issus du pôle. Remarquant ensuite que l'équation polaire de l'ovale de Descartes est de la forme (1), l'un des foyers étant pris pour pôle, il arrive à son théorème, en étudiant ce que deviennent alors les expressions trouvées dans le cas général pour la somme et la différence des arcs compris entre deux rayons vecteurs.

Interprétons les résultats généraux trouvés par M. Roberts, et pour cela définissons géométriquement les courbes représentées par l'équation (1).

Construisons (*fig.* 1) la courbe $\rho = \Omega$, et désignons-la par (A); décrivons du pôle P comme centre une circonférence ayant pour rayon $\sqrt{\alpha}$;

[*] *Journal de Mathématiques*, t. XV, p. 194.

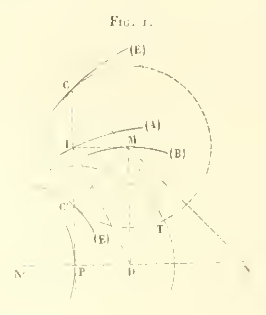
enfin construisons la courbe enveloppe des perpendiculaires élevées de tous les points de (A) aux rayons vecteurs qui y aboutissent, et désignons cette courbe par (B).

Je dis que la courbe enveloppe (E) des circonférences décrites de tous les points de (B) comme centres et coupant orthogonalement la circonférence de rayon $\sqrt{\alpha}$ a pour équation polaire

$$r^2 - 2r\Omega + \alpha = 0.$$

Cherchons en quels points une de ces circonférences décrite d'un

Fig. 1.



point quelconque M de (B) touche son enveloppe (E). Ces points ne sont autres que les points d'intersection de la circonférence (M) avec une circonférence infiniment voisine (M_1) ayant, comme la première, pour centre un point M_1 de (B) et coupant orthogonalement la circonférence de rayon $\sqrt{\alpha}$. Le point P étant le centre de la circonférence coupée orthogonalement par (M) et (M_1), fait partie de l'axe radical de ces circonférences, on sait en outre que cet axe radical est perpendiculaire à la ligne des centres MM_1; il faut donc, pour l'obtenir, abaisser une perpendiculaire du point P sur MM_1. Lorsque M_1 se rapprochant indéfiniment de M, arrive à se confondre avec ce point, la droite MM_1 devient tangente à (B) en M, et la perpendiculaire PI abaissée de P sur cette tangente coupe (M) aux points où elle touche son enveloppe.

Désignons par C et C′ ces deux points; d'après la manière dont ils sont déterminés, on voit que

$$PC + PC' = 2PI$$

et que

$$PC \times PC' = \alpha,$$

et comme PI est le rayon vecteur de (A), on a

$$PC + PC' = 2\Omega.$$

Les deux longueurs PC et PC′ sont donc les racines de l'équation (1) pour une valeur déterminée de ω, et lorsque l'on fait varier le point M sur (B) ou, ce qui revient au même, le point I sur (A), et par suite la valeur de ω, le points C et C′ décrivent la courbe (E), dont l'équation polaire est alors (1).

Nous sommes ainsi conduit à considérer l'équation (1) comme représentant une courbe enveloppe de circonférences. Les arcs dont nous allons nous occuper sont comptés à partir de points correspondants tels que C et C′ et limités à d'autres points correspondants. Pour plus de commodité dans le langage, nous dirons que ces arcs sont correspondants. Ainsi lorsque nous considérerons un arc de (B) et que de tous les points de cet arc nous décrirons des circonférences, ces courbes détermineront sur chaque branche de (E) deux arcs qui sont nos arcs correspondants.

Ceci posé, interprétons géométriquement les résultats de M. Roberts. En désignant par s_1 et s_2 deux arcs correspondants, ce géomètre trouve

$$(2)\qquad s_1 + s_2 = 2\int \sqrt{\frac{\Omega^2 + \Omega'^2 - \alpha}{\Omega^2 - \alpha}}\,\Omega d\omega,$$

$$(3)\qquad s_1 - s_2 = 2\int \sqrt{\Omega^2 + \Omega'^2 - \alpha}\,d\omega,$$

où Ω' désigne la dérivée de Ω par rapport à ω.

$\frac{d\Omega}{d\omega}$ est la sous-normale de (A); d'ailleurs la normale à cette courbe

au point I passe par le point D où la normale MD à (B) rencontre la perpendiculaire élevée du point P à PI; on a donc

$$\frac{d\Omega}{d\omega} \quad \text{ou} \quad \Omega' = \text{PD}.$$

PI étant égal à Ω et PD à Ω', $\sqrt{\Omega^2 + \Omega'^2}$ est égal à ID, c'est-à-dire à la normale en I à (B) ou à son égal MP.

$\sqrt{\Omega^2 + \Omega'^2 - \alpha}$ ou $\sqrt{\overline{\text{MP}}^2 - \alpha}$ est la longueur de la tangente MT menée de M à la circonférence (P) de rayon $\sqrt{\alpha}$, et par suite elle n'est autre que le rayon MC de la circonférence (M).

$\sqrt{\Omega^2 - \alpha}$ ou $\sqrt{\overline{\text{PI}}^2 - \alpha}$ est la tangente menée de I à la circonférence (P) de rayon $\sqrt{\alpha}$. Cette tangente est égale à IC, puisque les circonférences (M) et (P) se coupent orthogonalement.

Les égalités (2) et (3) peuvent donc s'écrire

$$(2') \qquad s_1 + s_2 = 2\int \frac{\text{MC} \times \text{PI}}{\text{IC}}\, d\omega = 2\int \text{MN}.d\omega,$$

$$(3') \qquad s_1 - s_2 = 2\int \text{MC}.d\omega.$$

Les formules (2) et (3) ont été établies en supposant que toutes les cordes de contact analogues à CC′ passent par un même point fixe P, mais les formules (2′) et (3′) sont évidemment applicables aux cas où les circonférences variables ont leurs centres sur une courbe quelconque, leurs rayons variant suivant une loi arbitraire. Dans ce dernier cas, évidemment aussi les cordes de contact analogues à CC′ enveloppent une courbe quelconque. Pour appliquer l'équation (2′), on déterminera MN en considérant pour la corde de contact correspondante à une circonférence (M), le point P où elle touche son enveloppe.

Arrivons à la démonstration directe des formules (2′) et (3′), démonstration qui fera bien comprendre à quoi tient la simplicité de ces formules.

De tous les points d'une courbe (B), on décrit des circonférences dont les rayons varient suivant une loi quelconque; on demande les

relations qui existent entre les arcs correspondants de la courbe (E) enveloppe de ces circonférences.

Soient CC′ la corde de contact de la circonférence (M) avec (E) et P le point où CC′ touche l'enveloppe des cordes de contact telles que CC′. En désignant par ds_1 et par ds_2 les arcs élémentaires déterminés sur (E) par deux cordes infiniment voisines, on a

$$ds_1 = \text{NC}\,d\omega,$$
$$ds_2 = \text{N}'\text{C}'\,d\omega,$$

$d\omega$ étant l'angle de contingence en P de la courbe enveloppe des cordes telles que CC′; mais comme ces cordes sont respectivement perpendiculaires aux tangentes de (B), $d\omega$ est aussi l'angle de contingence de cette dernière courbe en M. En ajoutant et retranchant les deux égalités que nous venons d'écrire, on a

$$ds_1 + ds_2 = (\text{NC} + \text{N}'\text{C}')\,d\omega = 2\,\text{MN}\,d\omega,$$
$$ds_1 - ds_2 = (\text{NC} - \text{N}'\text{C}')\,d\omega = 2\,\text{MC}\,d\omega,$$

puisque les triangles CMC′ et N′MN sont isocèles. En intégrant, nous avons les formules (2′) et (3′), et nous voyons que c'est parce que les cordes de contact telles que CC′ coupent respectivement les deux branches de (E) sous des angles égaux, que ces formules sont aussi simples. On doit remarquer qu'elles se changent l'une de l'autre, lorsque le point P, au lieu d'être sur le prolongement de CC′, comme nous l'avons supposé, est entre les points C et C′.

Passons aux applications des formules (2′) et (3′).

L'une de ces applications est relative à certaines courbes que nous allons définir et qui jouent un grand rôle dans la théorie des caustiques.

Lorsque des rayons émanés d'un point sont réfléchis par une courbe, ils enveloppent *une caustique parr éflexion*. Le lieu des points qu'on obtient en portant sur chaque rayon réfléchi une longueur égale à celle du rayon incident est une trajectoire orthogonale des rayons réfléchis; c'est une développante particulière des caustiques J. Bernoulli a donné à ces courbes le nom d'*anticaustiques*.

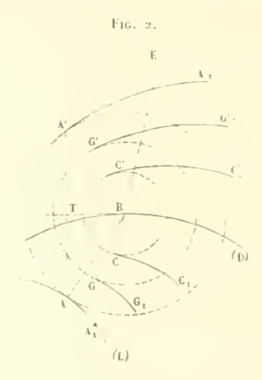
Nous étendons cette expression d'anticaustique à la courbe analogue que l'on obtient dans le cas de la réfraction, en considérant non plus un point lumineux, mais une courbe d'où s'échappent normalement les rayons lumineux.

Voici comment nous définirons l'*anticaustique* dans le cas de la réfraction.

L'*anticaustique* est l'enveloppe d'une suite de cercles dont les centres décrivent la ligne dirimante, dont les rayons sont aux distances de ces points à la courbe lumineuse dans un rapport constant qui est l'indice de réfraction [*]. Cette courbe a deux branches que l'on distingue par le signe de l'indice. Ces deux branches peuvent être ou ne pas être des courbes distinctes; nous désignons toujours leur ensemble sous le nom d'*anticaustique complète* [**].

Soient (L) (*fig.* 2) une courbe lumineuse, (D) une ligne dirimante,

Fig. 2.



AB un rayon lumineux réfracté suivant BE, C le point correspondant de l'anticaustique, déterminé de telle façon que $\frac{AB}{BC}$ égale l'indice de réfraction λ. L'anticaustique complète est l'enveloppe des circonfé-

[*] Ces courbes ont été étudiées par M. Quételet sous le nom de *caustiques secondaires*.

[**] *Nouvelles Annales de Mathématiques*, t. XX, p. 220.

rences telles que (B), décrite de B comme centre avec BC pour rayon.

En appliquant ce qui précède, on a pour la différence des arcs élémentaires correspondants sur cette courbe

$$ds_1 - ds_2 = 2\,\mathrm{BC}\,d\omega,$$

$d\omega$ étant l'angle de contingence de (D) en B.

Pour une autre anticaustique complète correspondante à l'indice $\mu = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BG}}$, on a

$$ds'_1 - ds'_2 = 2\,\mathrm{BG}\,d\omega.$$

En divisant membre à membre ces deux égalités, il vient

$$\frac{ds'_1 - ds'_2}{ds_1 - ds_2} = \frac{\mathrm{BG}}{\mathrm{CC}} = \frac{\lambda}{\mu},$$

et en intégrant,

$$\frac{\mathrm{GG}_1 - \mathrm{G}'\mathrm{G}'_1}{\mathrm{CC}_1 - \mathrm{C}'\mathrm{C}'_1} = \frac{\lambda}{\mu}.$$

On peut donc dire : *Pour deux anticaustiques complètes relatives à la même courbe lumineuse, à la même ligne dirimante et ne différant que par les indices de réfraction, les différences* [*] *des arcs correspondants sont dans le rapport inverse de ces indices.*

On introduit l'arc de la courbe lumineuse elle-même en faisant $\mu = 1$, il vient alors

$$\frac{\mathrm{AA}_1 - \mathrm{A}'\mathrm{A}'_1}{\mathrm{CC}_1 - \mathrm{C}'\mathrm{C}'_1} = \lambda.$$

Dans le cas particulier où (L) se réduit à un point lumineux, la courbe $\mathrm{A}'\mathrm{A}'_1$ n'est autre que la courbe que l'on obtient en abaissant du point lumineux des perpendiculaires sur les tangentes à (D), et en prolongeant ces droites de longueurs égales à elles-mêmes. En d'autres termes, la courbe $\mathrm{A}_1\mathrm{A}'_1$ est semblable à la podaire de la ligne dirimante correspondante au point lumineux. Nous pouvons donc dire :

---

[*] Dans certains cas, d'après une remarque faite précédemment, il faudrait dire les sommes.

La différence des arcs correspondants d'une anticaustique complète relative à un point lumineux est exprimable en arc de la podaire de la ligne dirimante prise par rapport à ce point lumineux.

Prenons une circonférence O pour ligne dirimante et un point F_1 pour point lumineux; dans ce cas l'anticaustique complète est un ovale de Descartes [*]. D'après la propriété générale que nous venons d'énoncer, nous voyons immédiatement que la différence des arcs correspondants d'un ovale de Descartes est exprimable en arc de podaire d'un cercle, mais cette courbe a des arcs exprimables en arcs d'ellipses [**] : donc la différence des arcs correspondants d'un ovale de Descartes est exprimable en arc d'ellipse.

Nous n'avons encore ainsi qu'une partie du théorème de M. Roberts, car il faut remarquer que les arcs correspondants de l'ovale de Descartes ne sont pas compris entre des droites passant par le point lumineux. Pour savoir comment sont disposés les arcs correspondants des ovales de Descartes, il faut connaître quelques propriétés de ces courbes.

Les cordes de contact des circonférences dont l'enveloppe est l'ovale de Descartes, anticaustique complète du cercle, passent par un point fixe. Ce point est un foyer de la courbe. C'est entre des droites issues de ce foyer que sont compris les arcs correspondants.

L'ovale de Descartes considéré comme anticaustique complète du cercle correspondant à un point lumineux a sur son axe trois foyers réels. Il peut être considéré comme enveloppe de cercles de trois manières différentes. La courbe se compose de deux branches (E) et (E') : l'une (E) renferme complétement l'autre (E'); au dehors de la plus grande se trouve un foyer F_1, dans l'intérieur de l'autre les deux autres foyers F_2 et F_3, F_2 est entre F_1 et F_3.

Deux droites issues du foyer F_1 comprennent sur la même branche des arcs correspondants dont on doit prendre la *différence*.

Deux droites issues du foyer F_2 comprennent sur l'une et l'autre

---

[*] Ce théorème est de M. Quételet.

[**] On arrive facilement à ce résultat en cherchant l'expression de l'arc élémentaire d'une ellipse engendrée par un point du plan d'une circonférence qui roule dans une autre de rayon double.

branche des arcs correspondants dont on doit prendre la *somme*.

Et pour le foyer F_3, on doit prendre sur l'une et l'autre branche les arcs correspondants et faire leur *différence*.

Nous pouvons résumer ces différents cas de la manière suivante :

Dans un ovale de Descartes, la différence des arcs correspondants compris entre des rayons vecteurs issus de l'un des foyers extrêmes est exprimable en arc d'ellipse; pour le foyer moyen, c'est la somme des arcs correspondants qui est exprimable en arc d'ellipse.

Nous venons de trouver pour une ligne dirimante donnée comment on peut exprimer la différence des arcs correspondants; proposons-nous le problème inverse et cherchons, par exemple, la ligne dirimante donnant lieu à une anticaustique complète correspondante à un point lumineux, telle, que la différence des arcs correspondants soit égale à une portion de droite.

D'après ce qui précède, il suffit de prendre pour ligne dirimante la courbe qui jouit de la propriété d'avoir une droite pour podaire. Cette courbe est une parabole. Donc *la différence des arcs correspondants de l'anticaustique complète d'une parabole, le foyer étant le point lumineux, est égale à un segment de droite que l'on peut facilement construire.*

Revenons à l'ovale de Descartes, que nous n'avons considéré que comme anticaustique du cercle. L'équation polaire de cette courbe

$$(4) \qquad \rho^2 - 2\rho(a + b\cos\theta) + c^2 = 0$$

étant de la forme (1), cet ovale possède, comme toutes les courbes représentées par l'équation (1), la propriété de se transformer en elle-même par rayons vecteurs réciproques, le pôle de transformation étant au pôle d'où partent les rayons vecteurs, et la constante de transformation étant le terme tout connu de l'équation polaire. Le pôle de transformation, en vertu de la propriété qu'il possède de permettre de transformer la courbe en elle-même, est appelé *pôle principal* [*].

[*] *Nouvelles Annales de Mathématiques*, t. XX, p. 218.

En nous reportant à la définition géométrique des courbes représentées par l'équation (1), nous voyons qu'on peut définir l'ovale de Descartes comme étant *la courbe enveloppe d'une suite de circonférences dont les centres décrivent une circonférence donnée et qui coupent orthogonalement une autre circonférence donnée.*

Le centre de cette dernière est le pôle principal de transformation.

Nous disons que les centres des circonférences variables décrivent une circonférence, parce que, d'après ce que nous avons vu précédemment, ils sont sur la courbe enveloppe des perpendiculaires élevées aux extrémités des rayons vecteurs de la courbe dont l'équation polaire est

$$\rho_1 = a + b\cos\theta,$$

et cette courbe est une podaire de cercle.

On doit remarquer que le pôle principal de l'ovale se confond avec l'un des foyers, et comme les trois foyers jouent le même rôle, il résulte immédiatement de là et de ce qui précède que l'ovale de Descartes a trois pôles principaux et est de trois manières différentes l'enveloppe des cercles qui ont pour centres radicaux les trois pôles principaux; enfin que les centres des circonférences variables décrivent trois circonférences [*].

L'anticaustique du cercle a donc trois pôles principaux, mais en considérant l'ovale de Descartes comme enveloppe de cercles dont les centres décrivent une circonférence et qui coupent orthogonalement un cercle donné, on n'a plus toujours trois foyers réels et par suite trois pôles principaux sur l'axe. Il suffit, pour le voir, de considérer le cas où, pour définir ainsi l'ovale de Descartes, on prend deux circonférences qui se coupent. Quoi qu'il en soit, les arcs correspondants de

---

[*] Pour compléter ceci, nous dirons que ces trois circonférences sont concentriques. Cette propriété m'a été indiquée par M. Moutard, qui y a été conduit comme conséquence d'une propriété générale, dont il veut bien me permettre de faire ici mention : *Les courbes du quatrième ordre qui peuvent se transformer en elles-mêmes par rayons vecteurs réciproques ont quatre pôles principaux, elles peuvent être considérées de quatre manières différentes comme enveloppes de cercles, les centres de ces circonférences sont sur quatre coniques homofocales.*

l'ovale de Descartes sont toujours compris entre des droites issues d'un pôle principal.

Enfin, pour terminer ce qui est relatif aux courbes planes, examinons la courbe enveloppe d'une suite de cercles décrits de tous les points d'une courbe quelconque comme centres avec les rayons de courbure correspondants pour rayons. Les points où l'une de ces circonférences touche son enveloppe, se trouvent sur une perpendiculaire à la tangente en ce point à la courbe donnée et passant par le centre de courbure de la développée de cette courbe correspondant au même point. En d'autres termes, *l'enveloppe des cordes de contact des circonférences variables avec leur enveloppe est la troisième développée de la courbe donnée.*

Les points où ces circonférences touchent leur enveloppe sont d'un même côté par rapport au point où la ligne qui les contient touche son enveloppe, il y a donc lieu de considérer la différence des arcs correspondants de l'enveloppe que nous examinons. Comme les circonférences variables ont pour rayons les rayons de courbure de la courbe donnée, on a pour cette différence

$$2\int \rho\, d\omega,$$

c'est-à-dire deux fois la longueur de la courbe donnée.

Nous pouvons donc dire :

Lorsque de tous les points d'un arc d'une courbe donnée comme centres avec les rayons de courbure pour rayons on décrit des circonférences, ces courbes donnent lieu à une enveloppe pour laquelle la différence des arcs correspondants est égale à la longueur de l'arc considéré.

Comme cas particulier, on peut examiner la développante du cercle qui conduit à une courbe dont l'équation polaire est de la forme (1).

Arrivons aux lignes sphériques.

On considère une sphère de centre O et une courbe (B) tracée sur sa surface; de tous les points de cette ligne comme pôles, on décrit des circonférences (M) de rayon variable; on demande l'expression de la différence des arcs correspondants de la courbe enveloppe (E) de toutes ces circonférences.

Soient M et M_1 deux points infiniment voisins de (B); de ces points comme pôles décrivons des petits cercles, les plans de ces cercles sont respectivement perpendiculaires aux lignes OM, OM_1, et par suite la droite d'intersection de ces deux plans est perpendiculaire au plan MOM_1. Lorsque M_1 se confond avec M, ce plan est tangent suivant OM à la surface conique que l'on obtient en joignant le centre O à tous les points de (B).

Désignons par CC′ la droite d'intersection des plans des circonférences (M) et (M_1), C et C′ étant les points de contact de (M) avec (E). La droite CC′, intersection des plans des circonférences (M) et (M_1), peut être considérée comme une génératrice de la surface développable enveloppe des plans des circonférences telles que (M), et la courbe (E) peut être aussi considérée comme l'intersection de la sphère avec cette développable.

Les génératrices de cette développable sont respectivement perpendiculaires aux plans tangents à la surface conique dont le sommet est en O et dont (B) est la directrice; CC′ et la génératrice voisine font donc entre elles un angle qui est égal à l'angle du plan tangent suivant OM à la surface conique [O, (B)] avec le plan tangent infiniment voisin, et ce dernier n'est autre que l'angle de contingence géodésique de (B) en M.

Ceci posé, appliquons sur un plan notre développable, ses plans tangents et les petits cercles contenus dans ceux-ci. (E) se transformera en une courbe (E′) enveloppe de ces petits cercles, et nous pouvons faire usage de l'expression trouvée précédemment pour la différence des arcs correspondants des courbes planes. (E) et (E′) ont même longueur, et les rayons des petits cercles dont (E′) est l'enveloppe sont les sinus des rayons sphériques des petits cercles (M). La génératrice CC′ devient après le développement la corde de contact de (M) avec (E′), et toutes les cordes telles que CC′ enveloppent la transformée de l'arête de rebroussement de notre développable. En appelant $d\gamma$ l'angle de deux cordes de contact infiniment voisines, nous avons, d'après ce qui précède, pour la différence des arcs correspondants,

$$(5) \qquad 2\int \sin \mathrm{MC}.d\gamma.$$

Cette formule peut être immédiatement employée dans le cas de la sphère, puisque $d\gamma$ est l'angle de contingence géodésique de (B) en M; elle correspond à la formule (3') et donne celle-ci, lorsqu'on suppose que le rayon de la sphère est devenu infini.

L'enveloppe des grands cercles tels que CC' est l'intersection avec la sphère d'une surface conique dont le sommet est en O et dont la directrice est l'arête de rebroussement de notre développable. Cette enveloppe se réduit à un point, lorsque cette arête de rebroussement se réduit elle-même à un point, c'est-à-dire lorsque la développable est simplement une surface conique.

Cette circonstance se présente, par exemple, toutes les fois que l'on considère la courbe d'intersection d'une surface ayant un pôle principal avec une sphère assujettie seulement à la condition de couper à angle droit la sphère ayant son centre au pôle principal et pour rayon la constante de la transformation qui permettrait de transformer la surface en elle-même par rayons vecteurs réciproques.

La courbe résultant de l'intersection d'un tore et d'une sphere quelconque offre toujours cette particularité, parce que tous les points de l'axe du tore sont des pôles principaux, et qu'il est toujours possible de trouver un point de cet axe qui sera le centre d'une sphère coupant à angle droit le tore et la sphère donnée. Ce point de l'axe est le sommet d'une surface conique du second degré qui contient la courbe d'intersection du tore et de la sphère. Cette courbe peut être considérée sur la sphère comme l'enveloppe de petits cercles décrits de tous les points d'une ellipse sphérique comme pôles et coupant à angle droit un petit cercle donné. Sous cette forme, on voit qu'on peut appliquer la formule (5). Désignons par D la distance sphérique d'un point M de l'ellipse sphérique au pôle du petit cercle donné de rayon R, et par $d\gamma$ l'angle de contingence géodésique de l'ellipse en M; on a immédiatement, pour la différence des arcs correspondants de la courbe dont nous nous occupons,

$$2\int \frac{\sqrt{\sin^2 D - \sin^2 R}}{\cos R}\, d\gamma.$$

On peut faire sur la sphère une application de la formule (5)

complétement analogue à ce que nous avons fait précédemment pour les anticaustiques.

De tous les points d'une ligne sphérique (B) comme pôles, décrivons des petits cercles dont les sinus des rayons sphériques soient aux sinus des distances sphériques de ces pôles à une courbe donnée (L) dans un rapport constant, nous obtiendrons ainsi une courbe enveloppe (E) et nous pourrons comparer la différence des arcs correspondants de cette courbe à celle des arcs correspondants de la courbe (E_1) engendrée comme (E) et qui ne diffère de celle-ci que par la valeur du rapport donné. Le rapport de ces différences est, comme pour les courbes planes, égal à l'inverse du quotient des rapports constants qui entrent dans la définition de (E) et de (E_1).

Lorsque (L) se réduit à un point, la différence des arcs correspondants de (E) est exprimable en arc de la courbe que l'on obtient en abaissant de ce point des arcs de grands cercles perpendiculaires aux tangentes de (B) et en prolongeant ces arcs de longueurs égales à eux-mêmes.

Montrons un exemple où cette différence est exprimable en arc de cercle, et pour cela rappelons d'abord quelques résultats.

Si le foyer F d'une conique plane est le point de contact du plan de cette conique avec une sphère, le cône ayant son sommet au centre de la sphère et pour directrice cette conique coupe la sphère suivant une conique sphérique ayant aussi F pour foyer.

Le cône ayant le centre de la sphère pour sommet et la podaire de la conique plane correspondante à F pour directrice, coupe la sphère suivant la podaire de l'ellipse sphérique correspondante au même point F.

La podaire correspondante au foyer de l'ellipse sphérique dont l'axe focal augmenté de la distance sphérique des foyers est égal à 2π est un grand cercle.

Si l'on joint, par des arcs de grand cercle, un point fixe d'une sphère à tous les points d'un grand cercle, en prolongeant chacun de ces arcs d'une longueur égale à eux-mêmes, on obtient un petit cercle.

A l'aide de tous ces résultats, on se rendra facilement compte de l'exactitude de la propriété suivante :

On considère sur une sphère une ellipse sphérique dont la distance sphérique des foyers augmentée de l'axe focal est égale à 2π, de tous les points de cette courbe comme pôles on décrit des petits cercles dont les rayons sphériques ont des sinus proportionnels aux sinus des distances sphériques de leurs pôles à l'un des foyers de l'ellipse ; la différence des arcs correspondants de la courbe enveloppe de ces cercles est exprimable en arc de cercle.

Ces quelques résultats suffisent pour montrer la nature des applications que l'on peut faire de la formule (5).

Quant à la formule (3'), nous avons laissé de côté tout ce qui est relatif à son emploi dans la transformation des propriétés d'arcs de courbes en propriétés d'arcs de courbes, soit à l'aide de la méthode des polaires réciproques, soit à l'aide de la transformation par rayons vecteurs réciproques.

THÉORÈME

CONCERNANT

LE DOUBLE DU CARRÉ D'UN NOMBRE PREMIER $8\mu+3$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

Soit m un nombre premier de la forme $8\mu+3$. Le double de son carré jouit de cette propriété que l'on peut poser au moins une fois, et toujours un nombre impair de fois, l'équation

$$2m^2 = x^2 + p^{4l+1}y^2,$$

x et y étant des entiers impairs et p un nombre premier (naturellement de la forme $8\nu+1$) qui ne divise pas y. On admet pour l la valeur zéro.

Ce théorème et celui que nous avons donné dans le cahier de janvier, au sujet de la quatrième puissance de m, ont entre eux une liaison intime, comme on le verra facilement.

Ajoutons deux exemples, et d'abord soit $m=3$: on trouve une équation canonique

$$2.3^2 = 1^2 + 17.1^2.$$

Soit ensuite $m=11$. Le nombre des équations canoniques s'élève alors à cinq :

$$2.11^2 = 1^2 + 241.1^2,$$
$$2.11^2 = 3^2 + 233.1^2,$$
$$2.11^2 = 7^2 + 193.1^2,$$
$$2.11^2 = 13^2 + 73.1^2,$$
$$2.11^2 = 15^2 + 17.1^2;$$

le théorème est donc encore vérifié.

NOTE

SUR

LES FONCTIONS al(x), etc., DE M. WEIERSTRASS;

PAR M. A. CAYLEY.

Les fonctions al(x), al$(x)_1$, al$(x)_2$, al$(x)_3$ de M. Weierstrass satisfont respectivement aux équations

$$\frac{d^2 \operatorname{al}(x)}{dx^2} + 2k^2 x \frac{d\operatorname{al}(x)}{dx} + 2kk'^2 \frac{d\operatorname{al}(x)}{dk} + k^2 x^2 \operatorname{al}(x) = 0,$$

$$\frac{d^2 \operatorname{al}(x)_1}{dx^2} + 2k^2 x \frac{d\operatorname{al}(x)_1}{dx} + 2kk'^2 \frac{d\operatorname{al}(x)_1}{dk} + (k'^2 + k^2 x^2) \operatorname{al}(x)_1 = 0,$$

$$\frac{d^2 \operatorname{al}(x)_2}{dx^2} + 2k^2 x \frac{d\operatorname{al}(x)_2}{dx} + 2kk'^2 \frac{d\operatorname{al}(x)_2}{dk} + (1 + k^2 x^2) \operatorname{al}(x)_2 = 0,$$

$$\frac{d^2 \operatorname{al}(x)_3}{dx^2} + 2k^2 x \frac{d\operatorname{al}(x)_3}{dx} + 2kk'^2 \frac{d\operatorname{al}(x)_3}{dk} + (k^2 + k^2 x^2) \operatorname{al}(x)_3 = 0,$$

ou, ce qui est la même chose, les fonctions

$$\operatorname{al}(x), \quad \sqrt{k}\operatorname{al}(x)_1, \quad \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k'}}\operatorname{al}(x)_2, \quad \frac{1}{\sqrt{k'}}\operatorname{al}(x)_3,$$

satisfont chacune à l'équation

$$\frac{d^2 z}{dx^2} + 2k^2 x \frac{dz}{dx} + 2kk'^2 \frac{dz}{dk} + k^2 x^2 z = 0.$$

Écrivons pour un moment ξ, $\varkappa$ au lieu de x, k; les fonctions al(ξ), etc., satisfont à l'équation

$$\frac{d^2 z}{d\xi^2} + 2\varkappa^2 \xi \frac{dz}{d\xi} + 2\varkappa\varkappa'^2 \frac{dz}{d\varkappa} + \varkappa^2 \xi^2 z = 0.$$

Cela étant, en posant

$$\xi = \frac{x}{\sqrt{k}}, \quad \varkappa = k,$$

on obtient

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{\sqrt{k}}\frac{dz}{d\xi}, \quad \frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{1}{k}\frac{d^2 z}{d\xi^2}, \quad \frac{dz}{dk} = -\frac{x}{2k\sqrt{k}}\frac{dz}{d\xi} + \frac{dz}{d\varkappa},$$

et de là

$$\frac{dz}{d\xi} = \sqrt{k}\frac{dz}{dx}, \quad \frac{d^2 z}{d\xi^2} = k\frac{d^2 z}{dx^2}, \quad \frac{dz}{d\varkappa} = \frac{dz}{dk} + \frac{x}{2k}\frac{dz}{dx}.$$

L'équation différentielle devient ainsi

$$k\frac{d^2 z}{dx^2} + 2k^2 x\frac{dz}{dx} + 2kk'^2\left(\frac{dz}{dk} + \frac{x}{2k}\frac{dz}{dx}\right) + kx^2 z = 0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{d^2 z}{dx^2} + \frac{1+k^2}{k}x\frac{dz}{dx} + 2k'^2\frac{dz}{dk} + x^2 z = 0,$$

équation qui sera ainsi satisfaite par

$$\mathrm{al}\left(\frac{x}{\sqrt{k}}\right), \quad \sqrt{k}\,\mathrm{al}\left(\frac{x}{\sqrt{k}}\right)_1, \quad \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k'}}\,\mathrm{al}\left(\frac{x}{\sqrt{k}}\right)_2, \quad \frac{1}{\sqrt{k'}}\,\mathrm{al}\left(\frac{x}{\sqrt{k}}\right)_3.$$

Or en écrivant

$$k + \frac{1}{k} = \alpha,$$

l'équation en z devient

$$(1) \qquad \frac{d^2 z}{dx^2} + 2\alpha x\frac{dz}{dx} - 2(\alpha^2 - 4)\frac{dz}{d\alpha} + x^2 z = 0,$$

laquelle est ce que devient celle-ci

$$(2) \quad \begin{cases} (1 - \alpha x^2 + x^4)\dfrac{d^2 z}{dx^2} + (n-1)(\alpha x - 2x^3)\dfrac{dz}{dx} - 2n(\alpha^2 - 4)\dfrac{dz}{d\alpha} \\ \qquad + n(n-1)x^2 z = 0, \end{cases}$$

en y écrivant $\frac{x}{\sqrt{n}}$ au lieu de x, et puis $n=\infty$. L'équation (2), trouvée par Jacobi (*Journal de Crelle*, t. IV, p. 185; 1829), a la propriété que voici, savoir en posant

$$a = k + \frac{1}{k}, \quad x = \sqrt{k}\,\mathrm{sin\,am}\, u,$$

alors l'équation est satisfaite en prenant pour z soit le numérateur, soit le dénominateur, de la fonction rationnelle de x qui donne la valeur de la fonction $\sqrt{\lambda}\,\mathrm{sin\,am}\left(\frac{u}{M}, \lambda\right)$, où λ, M sont le module et le multiplicateur qui correspondent à la transformation de l'ordre n (n étant un nombre impair quelconque).

L'équation fut donnée par Jacobi sans démonstration. Je l'ai démontrée (*Camb. and Dub. Math. Journal*, t. II, p. 256; 1847) de la manière que voici, savoir en écrivant

$$z = \left(\frac{2Kk'}{\pi}\right)^{\frac{n-1}{2}} \Theta^{-n}(u).\Sigma.$$

On obtient pour Σ l'équation

$$\frac{d^2\Sigma}{du^2} - 2nu\left(k'^2 - \frac{E}{K}\right)\frac{d\Sigma}{du} + 2nkk'^2\frac{d\Sigma}{dk} = 0,$$

laquelle, en prenant

$$\omega = \frac{n\pi K'}{K}, \quad v = \frac{n\pi u}{2K},$$

devient

$$\frac{d^2\Sigma}{dv^2} - 4\frac{d\Sigma}{d\omega} = 0,$$

équation mentionnée par Jacobi, laquelle est satisfaite par

$$\Sigma = \Theta\left(nu, \frac{nK'}{K}\right) \quad \text{ou} \quad \Sigma = H\left(nu, \frac{nK'}{K}\right);$$

cela donne pour z deux valeurs qui sont le dénominateur et le numé-

rateur de la fraction dont il s'agit. J'ose croire que ce doit être à peu près de cette manière que l'équation fut trouvée par Jacobi.

Or les solutions en question de l'équation (1) peuvent être trouvées au moyen de l'équation de Jacobi ; pour cela, au lieu des valeurs ci-dessus données de ω, υ, j'écris

$$\omega = \frac{\pi K'}{K}, \quad \upsilon = \frac{\sqrt{n}\pi u}{2K},$$

ce qui conduit à la même équation

$$\frac{d^2\Sigma}{d\upsilon^2} - 4\frac{d\Sigma}{d\omega} = 0,$$

laquelle sera ainsi satisfaite par

$$\Sigma = \Theta\left(\sqrt{n}u, \frac{K'}{K}\right), \quad \Sigma = H\left(\sqrt{n}u, \frac{K'}{K}\right),$$

ou, ce qui est la même chose, par

$$\Sigma = \Theta(\sqrt{n}u), \qquad \Sigma = H(\sqrt{n}u).$$

L'équation (2) sera donc satisfaite par

$$z = \left(\frac{2Kk'}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}(n-1)} \Theta^{-n}(u)\,\Theta(\sqrt{n}u),$$

ou, en se souvenant que $\Theta(0) = \sqrt{\frac{2Kk'}{\pi}}$, par

$$z = \frac{\Theta(\sqrt{n}u)}{\Theta(0)} \cdot \frac{\Theta^n(0)}{\Theta^n(u)}.$$

Or en écrivant $\frac{x}{\sqrt{n}}$ au lieu de x, pour faire ensuite $n = \infty$, nous avons

$$\frac{x}{\sqrt{n}} = \sqrt{k}\,\mathrm{sinam}\,u,$$

équation qui se réduit à

$$u = \frac{x}{\sqrt{nk}};$$

ce qui donne

$$\Theta(\sqrt{n}u) = \Theta\left(\frac{x}{\sqrt{k}}\right), \quad \Theta^n u = \Theta^n(0)\, e^{\frac{1}{2}nu^2\left(1-\frac{E}{K}\right)} = \Theta^n(0)\, e^{\frac{x^2}{2k}\left(1-\frac{E}{K}\right)},$$

puisque

$$\Theta(u) = \Theta(0)\, e^{\frac{1}{2}u^2\left(1-\frac{E}{K}\right) - k^2\int_0 du \int_0 du \sin^2 \operatorname{am} u},$$

et $n\int_0 du \int_0 du \sin^2 \operatorname{am} u$, en y substituant $u = \frac{x}{\sqrt{nk}}$, contient le facteur $\frac{1}{n}$ et se réduit ainsi à zéro. Donc on obtient

$$z = \frac{\Theta\left(\frac{x}{\sqrt{k}}\right)}{\Theta(0)}\, e^{\frac{x^2}{2k}\left(1-\frac{E}{K}\right)}$$

comme solution de l'équation (1) qui se déduit de l'équation (2) en y écrivant $\frac{x}{\sqrt{n}}$ au lieu de x et puis $n = \infty$. Et cette valeur de z est précisément la fonction al $\left(\frac{x}{\sqrt{k}}\right)$ de M. Weierstrass. On obtient de même la solution

$$z = \frac{\mathrm{H}\left(\frac{x}{\sqrt{k}}\right)}{\Theta(0)}\, e^{\frac{x^2}{2k}\left(1-\frac{E}{K}\right)},$$

ou, ce qui est la même chose,

$$z = \frac{\mathrm{H}\left(\frac{x}{\sqrt{k}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{k}}\mathrm{H}'(0)}\, e^{\frac{x^2}{2k}\left(1-\frac{E}{K}\right)},$$

qui est la fonction $\sqrt{k}$ al $\left(\frac{x}{\sqrt{k}}\right)_1$. Et d'une manière semblable les solu-

tions

$$z = \frac{\mathrm{H}\left(\frac{x}{\sqrt{k}}+\mathrm{K}\right)}{\Theta(0)}\, e^{\frac{x^2}{2k}\left(1-\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{K}}\right)}, \qquad z = \frac{\Theta\left(\frac{x}{\sqrt{k}}+\mathrm{K}\right)}{\Theta(0)}\, e^{\frac{x^2}{2k}\left(1-\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{K}}\right)},$$

qui sont les fonctions $\sqrt{\frac{k}{k'}}\,\mathrm{al}\left(\frac{x}{\sqrt{k}}\right)_2$, $\frac{1}{\sqrt{k'}}\,\mathrm{al}\left(\frac{x}{\sqrt{k}}\right)_3$.

J'ajoute que dans le Mémoire cité (1847) j'ai donné la suite

$$z = \mathrm{C}_0 + \mathrm{C}_1\frac{x^2}{1.2} + \mathrm{C}_2\frac{x^4}{1.2.3.4} + \ldots,$$

ou

$$\begin{aligned}
\mathrm{C}_0 &= 1,\\
\mathrm{C}_1 &= 0,\\
\mathrm{C}_2 &= -2,\\
\mathrm{C}_3 &= +8\alpha,\\
\mathrm{C}_4 &= -32\alpha^2 - 4,\\
\mathrm{C}_5 &= +128\alpha^3 + 96\alpha,\\
\mathrm{C}_6 &= -512\alpha^4 - 960\alpha^2 - 408,\\
\mathrm{C}_7 &= +2048\alpha^5 + 7168\alpha^3 + 7584\alpha,\\
\mathrm{C}_8 &= -8192\alpha^6 - 46080\alpha^4 - 88320\alpha^2 - 15384,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

de façon qu'en général

$$\mathrm{C}_{r+2} = -(2r+1)(2r+2)\mathrm{C}_r - (2r+2)\alpha\mathrm{C}_{r+1} + 2(\alpha^2-4)\frac{d\mathrm{C}_{r+1}}{d\alpha};$$

c'est le développement de M. Weierstrass pour la fonction $\mathrm{al}\left(\frac{x}{\sqrt{k}}\right)$; seulement je ne connaissais pas alors l'expression finie

$$\mathrm{al}\left(\frac{x}{\sqrt{k}}\right), \quad \text{ou} \quad \frac{1}{\Theta(0)}\,\Theta\left(\frac{x}{\sqrt{k}}\right) e^{\frac{x^2}{2k}\left(1-\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{K}}\right)}$$

de cette suite. Je remarque en passant que pour $\alpha = 2$, la suite se réduit à

$$e^{\frac{1}{2}x^2}\,\frac{1}{2}(e^x + e^{-x}).$$

SUR LA FORME

$x^2+4y^2+8z^2+16t^2$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

On demande le nombre N des représentations d'un entier donné n ou $2^\alpha m$ (m impair, $\alpha = 0, 1, 2, 3,\ldots$) par la forme

$$x^2+4y^2+8z^2+16t^2.$$

Entrons dans le détail des divers cas qui peuvent se présenter.

1° Soit n impair, $n=m$. On a évidemment $N=0$, si $m=4l+3$. Le cas de $m=4l+1$ se décompose en deux autres.

Pour $m=8\mu+5$, je trouve

$$N=\omega_1(m),$$

la fonction $\omega_1(m)$ étant celle que nous avons déjà tres-souvent rencontrée et que nous définissons (au moyen des diviseurs conjugués d, δ de l'entier impair $m=d\delta$) par l'équation

$$\omega_1(m)=\sum(-1)^{\frac{\delta^2-1}{8}}d.$$

Pour $m=8\mu+1$, la valeur de N est plus compliquée. On a en effet alors

$$N=\omega_1(m)+\sum(-1)^{\frac{r-1}{2}}r,$$

la somme

$$\sum(-1)^{\frac{r-1}{2}}r$$

se rapportant aux entiers impairs et positifs r qui peuvent figurer dans l'équation

$$m = r^2 + 2u^2,$$

où l'entier u (qui sera pair ici à cause de $m = 8k + 1$) doit, quand il n'est pas nul, être affecté successivement du signe $+$ et du signe $-$.

2° Soit, en second lieu, n impairement pair, $n = 2m$. Il est clair que, dans ce cas, $N = 0$.

3° Soit ensuite n divisible par 4, mais non par 8, $n = 4m$. La formule est alors

$$N = 4\omega_1(m),$$

quel que soit l'entier impair m.

4° Mais pour n divisible par 8, avec quotient pair ou impair, $n = 2^\alpha m$, $\alpha > 2$, la forme linéaire de m prend de l'influence. On a

$$N = 2(2^{\alpha-1} - 1)\omega_1(m)$$

si $m = 8k \pm 1$, mais

$$N = 2(2^{\alpha-1} + 1)\omega_1(m)$$

si $m = 8k \pm 3$.

Je ne m'arrêterai pas à la recherche du nombre M des solutions propres.

SUR LA FORME
$x^2 + 2y^2 + 16z^2 + 16t^2$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

On demande le nombre N des représentations d'un entier donné n par la forme

$$x^2 + 2y^2 + 16z^2 + 16t^2.$$

Posons, comme d'ordinaire $n = 2^\alpha m$, m étant impair et l'exposant α pouvant se réduire à zéro; puis, considérons d'une part la fonction $\omega_1(m)$ définie (au moyen des diviseurs conjugués d, δ de l'entier impair $m = d\delta$) par la formule

$$\omega_1(m) = \sum (-1)^{\frac{\delta^2 - 1}{8}} d,$$

et d'autre part la somme

$$\sum (-1)^{\frac{r-1}{2}} r,$$

relative aux entiers positifs r qui peuvent figurer dans l'équation

$$m = r^2 + 2u^2,$$

où l'entier u est indifféremment positif, nul ou négatif. De là nous tirerons la valeur de N propre aux divers cas qui s'offriront successivement.

Soit d'abord n impair, $n = m$. Nous aurons évidemment $N = 0$ si m est de l'une des deux formes $8k - 1$, $8k - 3$. Mais

$$N = \omega_1(m) + \sum (-1)^{\frac{r-1}{2}} r,$$

si m est au contraire de l'une des deux formes $8k + 1$, $8k + 3$.

Ainsi, pour $m = 1 = 1^2 + 2.0^2$, on doit avoir $N = 2$, et cela s'accorde avec l'équation

$$1 = (\pm 1)^2 + 2.0^2 + 16.0^2 + 16.0^2,$$

qui donne pour l'entier 1 deux représentations. De même, pour

$$m = 3 = 1^2 + 2(\pm 1)^2,$$

on doit avoir $N = 2 + 2 = 4$: l'équation

$$3 = (\pm 1)^2 + 2(\pm 1)^2 + 16.0^2 + 16.0^2$$

confirme ce fait.

Pour $m = 9$, comme on a

$$9 = 1^2 + 2(\pm 2)^2$$

et

$$9 = 3^2 + 2.0^2,$$

notre formule donne $N = 6$. Or l'entier 9 a, en effet, six représentations contenues dans les équations ci-après :

$$9 = (\pm 1)^2 + 2(\pm 1)^2 + 16.0^2 + 16.0^2,$$
$$9 = (\pm 3)^2 + 2.0^2 + 16.0^2 + 16.0^2.$$

Enfin, pour $m = 17 = 3^2 + 2(\pm 2)^2$, il nous vient $N = 12$; et l'entier 17 possède bien douze représentations, en vertu des équations que voici :

$$17 = (\pm 3)^2 + 2(\pm 2)^2 + 16.0^2 + 16.0^2,$$
$$17 = (\pm 1)^2 + 2.0^2 + 16(\pm 1)^2 + 16.0^2,$$
$$17 = (\pm 1)^2 + 2.0^2 + 16.0^2 + 16(\pm 1)^2.$$

Soit, à présent, n pair, $n = 2^\alpha m$, $\alpha > 0$. L'équation

$$2^\alpha m = x^2 + 2y^2 + 16z^2 + 16t^2$$

ne pouvant alors avoir lieu qu'avec x pair, $x = 2x_1$, revient à celle-ci :

$$2^{\alpha-1}m = y^2 + 2x_1^2 + 8z^2 + 8t^2,$$

que nous avons discutée dans le cahier de février. Il résulte de là, pour la détermination du nombre N des représentations d'un entier pair n par la forme actuelle

$$x^2 + 2y^2 + 16z^2 + 16t^2,$$

les formules suivantes :

Pour n impairement pair, $n = 2m$, on aura $N = 0$ si m est de l'une des deux formes $8k - 1$, $8k - 3$. Mais

$$N = 2\omega_1(m)$$

si m est au contraire de l'une des deux formes $8k + 1$, $8k + 3$.

Pour n divisible par 4, non par 8, $n = 4m$, on a

$$N = 2\omega_1(m),$$

quelle que soit la forme linéaire de m.

Enfin pour n divisible par 8, $n = 2^\alpha m$, $\alpha > 2$, on a

$$N = 2(2^{\alpha-2} - 1)\omega_1(m),$$

si $m = 8k \pm 1$, mais

$$N = 2(2^{\alpha-2} + 1)\omega_1(m),$$

si $m = 8k \pm 3$.

SUR LA FORME
$x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 8t^2$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

On demande le nombre N des représentations d'un entier donné n (ou $2^\alpha m$, m impair, $\alpha = 0, 1, 2, \ldots$) par la forme

$$x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 8t^2.$$

Voici ce que nous avons trouvé à cet égard.

Soit d'abord n impair, $n = m$. On a évidemment $N = 0$ si m est de la forme $8k - 1$. Mais pour m de l'une des deux formes $8k + 1$, $8k - 3$, on a

$$N = 2\omega_1(m),$$

et, pour $m = 8k + 3$,

$$N = 4\omega_1(m),$$

la fonction $\omega_1(m)$ étant définie à l'ordinaire par les équations

$$m = d\delta, \quad \omega_1(m) = \sum (-1)^{\frac{\delta^2 - 1}{8}} d.$$

Soit ensuite n pair, $n = 2^\alpha m$, $\alpha > 0$. L'équation

$$2^\alpha m = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 8t^2$$

exigeant alors que x soit pair, $x = 2x_1$, se ramènera à celle-ci :

$$2^{\alpha - 1} m = y^2 + z^2 + 2x_1^2 + 4t^2,$$

qui a été discutée dans le cahier de mars. D'après cela, on obtient, pour la détermination du nombre N des représentations d'un entier pair n, par la forme actuelle

$$x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 8t^2,$$

les équations suivantes :

En premier lieu, pour n impairement pair, $n = 2m$, on a

$$N = 4\omega_1(m),$$

quelle que soit la forme linéaire de m.

En second lieu, pour n pairement pair, $n = 2^\alpha m$, $\alpha > 1$, on a

$$N = 2(2^\alpha - 1)\omega_1(m),$$

si $m = 8k \pm 1$, mais

$$N = 2(2^\alpha + 1)\omega_1(m),$$

si $m = 8k \pm 3$. La forme linéaire de m a donc alors de l'influence.

SUR LA FORME
$x^2 + 2y^2 + 4z^2 + 16t^2$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

On demande le nombre N des représentations d'un entier donné n (ou $2^\alpha m$, m impair, $\alpha = 0, 1, 2, \ldots$) par la forme

$$x^2 + 2y^2 + 4z^2 + 16t^2.$$

Soit d'abord n impair, $n = m$. On aura simplement

$$\mathrm{N} = \omega_1(m),$$

si m est de l'une des deux formes $8k-1$, $8k-3$, la fonction $\omega_1(m)$ étant définie, comme d'ordinaire, par les équations

$$m = d\delta, \quad \omega_1(m) = \sum (-1)^{\frac{\delta^2-1}{8}} d.$$

Mais si m est au contraire de l'une des deux formes $8k+1$, $8k+3$, il faut écrire

$$\mathrm{N} = \omega_1(m) + \sum (-1)^{\frac{r-1}{2}} r,$$

la somme

$$\sum (-1)^{\frac{r-1}{2}} r$$

se rapportant aux entiers positifs r qui peuvent figurer dans l'équation

$$m = r^2 + 2u^2,$$

où l'entier u, quand il n'est pas nul, doit être pris négativement comme positivement. Au reste, cette dernière formule est générale, car la somme

$$\sum (-1)^{\frac{r-1}{2}} r$$

se réduit d'elle-même à zéro quand m est de l'une des deux formes $8k-1$, $8k-3$.

Ainsi pour $m = 1 = 1^2 + 2.0^2$, on doit avoir $N = 2$, et cela s'accorde avec l'équation

$$1 = (\pm 1)^2 + 2.0^2 + 4.0^2 + 16.0^2$$

qui fournit pour le nombre 1 deux représentations.

Pour $m = 3 = 1^2 + 2(\pm 1)^2$, notre formule donne $N = 4$. Or l'entier 3 a, en effet, quatre représentations contenues dans l'équation ci-après :

$$3 = (\pm 1)^2 + 2(\pm 1)^2 + 4.0^2 + 16.0^2.$$

Pour $m = 5$, on trouve de même $N = 4$. L'équation

$$5 = (\pm 1)^2 + 2.0^2 + 4(\pm 1)^2 + 16.0^2$$

s'accorde avec cette valeur de N.

Enfin pour $m = 7$, on a $N = 8$. Or l'équation

$$7 = (\pm 1)^2 + 2(\pm 1)^2 + 4(\pm 1)^2 + 16.0^2$$

donne, en effet, pour le nombre 7 huit représentations.

Le cas de n pair, $n = 2^\alpha m$, $\alpha > 0$, n'offre aucune difficulté ; car l'équation

$$2^\alpha m = x^2 + 2y^2 + 4z^2 + 16t^2$$

exigeant alors que x soit pair, $x = 2x_1$, se change en celle-ci :

$$2^{\alpha-1} m = y^2 + 2x_1^2 + 2z^2 + 8t^2$$

qui a fait l'objet de l'article précédent. D'après cela, on a pour la détermination du nombre N des représentations d'un entier pair n, par la forme actuelle

$$x^2 + 2y^2 + 4z^2 + 16t^2,$$

les équations suivantes :

Soit, en premier lieu, n impairement pair, $n = 2m$. On a $N = 0$ si m est de la forme $8k - 1$. Mais

$$N = 2\omega_4(m)$$

si m est de l'une des deux formes $8k + 1$, $8k - 3$. Enfin

$$N = 4\omega_4(m)$$

si $m = 8k + 3$.

Soit, en second lieu, n multiple de 4, non de 8, $n = 4m$. On a alors

$$N = 4\omega_4(m),$$

quelle que soit la forme linéaire de m.

Soit enfin n multiple de 8, $n = 2^\alpha m$, $\alpha > 2$. On a

$$N = 2(2^{\alpha-1} - 1)\,\omega_4(m)$$

si $m = 8k \pm 1$, mais

$$N = 2(2^{\alpha-1} + 1)\,\omega_4(m)$$

si $m = 8k \pm 3$.

SUR LA FORME

$x^2 + 2y^2 + 8z^2 + 16t^2$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

Pour trouver le nombre N des représentations d'un entier donné n (ou $2^\alpha m$, m impair, $\alpha = 0, 1, 2, \ldots$) par la forme

$$x^2 + 2y^2 + 8z^2 + 16t^2,$$

on n'a en quelque sorte à s'occuper que du cas de n impair, $n = m$. Encore est-il évident à priori que $N = 0$ pour les entiers de l'une des deux formes $8k + 5$, $8k + 7$. Mais pour $n = m = 8k + 3$, je trouve

$$N = \zeta_1(m),$$

$\zeta_1(m)$ désignant la somme des diviseurs de m. Pour $n = m = 8k + 1$, la formule (un peu plus compliquée) est

$$N = \zeta_1(m) + \sum (-1)^{\frac{i-1}{2}} i,$$

la somme

$$\sum (-1)^{\frac{i-1}{2}} i$$

se rapportant aux entiers positifs i qui peuvent figurer dans l'équation

$$m = i^2 + 4s^2,$$

où l'entier s est indifféremment positif, nul ou négatif.

Relativement au cas de n pair, $n = 2^\alpha m$, $\alpha > 0$, il suffit d'observer que pour que l'équation

$$2^\alpha m = x^2 + 2y^2 + 8z^2 + 16t^2$$

ait lieu alors, il faut que x soit pair, $x = 2x_1$, de sorte qu'en divisant par 2 il vient

$$2^{\alpha-1}m = y^2 + 2x_1^2 + 4z^2 + 8t^2,$$

équation que nous avons discutée dans le cahier de novembre 1861. De là découlent, pour le nombre N des représentations d'un entier pair n par la forme

$$x^2 + 2y^2 + 8z^2 + 16t^2,$$

les conséquences suivantes.

Pour n impairement pair, $n = 2m$, on a

$$N = \zeta_1(m) + \sum (-1)^{\frac{i-1}{2}} i$$

si $m = 8k + 1$, mais

$$N = \zeta_1(m) - \sum (-1)^{\frac{i-1}{2}} i$$

si $m = 8k + 5$, enfin

$$N = \zeta_1(m)$$

si $m = 8k + 3$ ou $8k + 7$.

Pour n divisible par 4, non par 8, $n = 4m$, on a

$$N = 2\zeta_1(m),$$

quelle que soit la forme linéaire de m.

Pour n divisible par 8, non par 16, $n = 8m$, on a

$$N = 4\zeta_1(m).$$

Pour n divisible par 16, non par 32, $n = 16m$, la formule est

$$N = 8\zeta_1(m).$$

Enfin, pour n divisible par 32, $n = 2^\alpha m$, $\alpha > 4$, il vient invariablement

$$N = 24\zeta_1(m).$$

SUR LA FORME

$x^2 + y^2 + 2z^2 + 8t^2$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

On demande le nombre N des représentations d'un entier donné n (ou $2^\alpha m$, m impair, $\alpha = 0, 1, 2,\ldots$) par la forme

$$x^2 + y^2 + 2z^2 + 8t^2.$$

Le cas de n impair, $n = m$, est très-simple. En effet, dans l'équation

$$m = x^2 + y^2 + 2z^2 + 8t^2,$$

l'un quelconque des deux entiers x, y est pair, l'autre impair. Le nombre des solutions se réduira donc à moitié si l'on exige que l'entier pair soit toujours placé le second. Mais alors ayant $y = 2y_1$, on peut écrire

$$m = x^2 + 2z^2 + 4y_1^2 + 8t^2.$$

Or nous avons discuté cette dernière équation dans le cahier de novembre 1861. De là résulte, pour le nombre N des représentations d'un entier impair m par la forme actuelle

$$x^2 + y^2 + 2z^2 + 8t^2,$$

l'expression suivante

$$N = 2\left[\zeta_1(m) + (-1)^{\frac{m^2-1}{8}} \sum (-1)^{\frac{i-1}{2}} i\right],$$

$\zeta_1(m)$ désignant la somme des diviseurs de m, tandis que la somme

$$\sum (-1)^{\frac{i-1}{2}} i$$

se rapporte aux entiers positifs i qui peuvent figurer dans l'équation

$$m = i^2 + 4s^2,$$

où l'entier s est indifféremment positif, nul ou négatif.

Le cas de n pair n'est pas moins facile, attendu que quand l'exposant α est > 0, l'équation

$$2^\alpha m = x^2 + y^2 + 2z^2 + 8t^2$$

se ramène à celle-ci :

$$2^{\alpha - 1} m = X^2 + Y^2 + Z^2 + 4T^2,$$

sans que le nombre des solutions soit changé. Or nous avons discuté cette dernière équation dans le cahier de décembre 1861. D'après cela, je trouve, relativement au nombre N des représentations d'un entier pair n, par la forme

$$x^2 + y^2 + 2z^2 + 8t^2,$$

les théorèmes suivants.

Pour n impairement pair, $n = 2m$, on a

$$N = \left[4 + 2(-1)^{\frac{m-1}{2}}\right]\zeta_1(m).$$

Pour n divisible par 4, non par 8, $n = 4m$, il vient

$$N = 12\zeta_1(m),$$

quelle que soit la forme linéaire de m.

Pour n divisible par 8, non par 16, $n = 8m$, on a

$$N = 8\zeta_1(m).$$

Enfin, pour n divisible par 16, $n = 2^\alpha m$, $\alpha > 3$, on a invariablement

$$N = 24\zeta_1(m),$$

si grand que α puisse devenir.

SUR LA FORME
$x^2 + y^2 + 4z^2 + 16t^2$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

Étant donné un entier n pair ou impair (que nous représenterons par $2^\alpha m$, m étant impair et l'exposant α pouvant se réduire à zéro), on demande le nombre N des représentations de n par la forme

$$x^2 + y^2 + 4z^2 + 16t^2,$$

c'est-à-dire le nombre N des solutions de l'équation indéterminée

$$n = x^2 + y^2 + 4z^2 + 16t^2,$$

où x, y, z, t sont des entiers positifs, nuls ou négatifs.

Soit d'abord n impair, $n = m$. Il est clair que l'on aura $\mathrm{N} = 0$, si $m = 4l + 3$. Mais pour

$$m = 4l + 1,$$

je trouve

$$\mathrm{N} = 2\left[\zeta_1(m) + \sum (-1)^{\frac{i-1}{2}} i\right],$$

$\zeta_1(m)$ désignant la somme des diviseurs de m, et

$$\sum (-1)^{\frac{i-1}{2}} i$$

se rapportant aux entiers impairs et positifs i qui peuvent figurer dans l'équation

$$m = i^2 + 4s^2,$$

où l'entier s est indifféremment pair ou impair, positif, nul ou né-

gatif. En effet, comme dans l'équation

$$4l + 1 = x^2 + y^2 + 4z^2 + 16t^2,$$

un quelconque des entiers x, y est pair, l'autre impair, on réduira à moitié le nombre des solutions si l'on exige que y soit pair. Mais alors l'équation à traiter peut s'écrire

$$4l + 1 = x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 16t^2,$$

et l'on a vu (dans le cahier de mars) que le nombre des solutions est

$$\zeta_1(m) + \sum (-1)^{\frac{i-1}{2}} i.$$

De là, pour N, la valeur que nous avons écrite :

$$N = 2\left[\zeta_1(m) + \sum (-1)^{\frac{i-1}{2}} i\right].$$

Ainsi, pour $m = 1$, on doit avoir $N = 4$; et cela s'accorde avec les équations

$$1 = (\pm 1)^2 + 0^2 + 4.0^2 + 16.0^2,$$
$$1 = 0^2 + (\pm 1)^2 + 4.0^2 + 16.0^2.$$

Pour $m = 5 = 1^2 + 4(\pm 1)^2$, on trouve

$$N = 2(6 + 2) = 16.$$

Or les équations

$$5 = (\pm 1)^2 + (\pm 2)^2 + 4.0^2 + 16.0^2,$$
$$5 = (\pm 2)^2 + (\pm 1)^2 + 4.0^2 + 16.0^2,$$
$$5 = (\pm 1)^2 + 0^2 + 4(\pm 1)^2 + 16.0^2,$$
$$5 = 0^2 + (\pm 1)^2 + 4(\pm 1)^2 + 16.0^2,$$

fournissent en effet pour l'entier 5 seize représentations.

Pour $m = 9 = 3^2 + 4.0^2$, notre formule donne

$$N = 2(13 - 3) = 20 :$$

or on trouve aisément les vingt représentations qu'elle indique, au moyen des équations

$$9 = 1^2 + 2^2 + 4.1^2 + 16.0^2$$

et

$$9 = 3^2 + 0^2 + 4.0^2 + 16.0^2,$$

en y affectant du double signe $\pm$ les racines des carrés qui ne sont pas nuls, et en opérant les permutations convenables.

Soit enfin $m = 17 = 1 + 4(\pm 2)^2$. Il viendra

$$N = 2(18 + 2) = 40.$$

Voici les équations qui serviront à vérifier ce résultat :

$$17 = 1^2 + 4^2 + 4.0^2 + 16.0^2,$$
$$17 = 1^2 + 0^2 + 4.2^2 + 16.0^2,$$
$$17 = 2^2 + 3^2 + 4.1^2 + 16.0^2,$$
$$17 = 1^2 + 0^2 + 4.0^2 + 16.1^2.$$

Supposons maintenant n pair, $n = 2^\alpha m$, $\alpha > 0$. A l'équation

$$2^\alpha m = x^2 + y^2 + 4z^2 + 16t^2,$$

on pourra, dans ce cas, substituer celle-ci

$$2^{\alpha-1} m = x^2 + y^2 + 2z^2 + 8t^2,$$

sans que le nombre des solutions soit changé. Or cette dernière équation a fait l'objet de l'article précédent. D'après cela, on obtient facilement, pour la détermination du nombre N des représentations d'un

entier pair n par la forme

$$x^2 + y^2 + 4z^2 + 16t^2,$$

qui nous occupe ici, les équations suivantes.

Pour n impairement pair, $n = 2m$, on a

$$N = 2\zeta_1(m)$$

si $m = 4l + 3$, mais

$$N = 2\left[\zeta_1(m) + \sum(-1)^{\frac{i-1}{2}} i\right]$$

si $m = 8k + 1$, et

$$N = 2\left[\zeta_1(m) - \sum(-1)^{\frac{i-1}{2}} i\right]$$

si $m = 8k + 5$.

Pour n divisible par 4, non par 8, $n = 4m$, on a

$$N = 6\zeta_1(m)$$

si $m = 4l + 1$, mais

$$N = 2\zeta_1(m)$$

si $m = 4l + 3$.

Ici cesse l'influence de la forme linéaire de m. En effet, pour n divisible par 8, non par 16, $n = 8m$, on a toujours

$$N = 12\zeta_1(m).$$

Pour n divisible par 16, non par 32, $n = 16m$, la formule est

$$N = 8\zeta_1(m).$$

Enfin, pour n divisible par 32, avec quotient pair ou impair, $n = 2^\alpha m$, $\alpha > 4$, on a invariablement

$$N = 24\zeta_1(m),$$

si grand que α puisse devenir.

SUR LA FORME
$x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 16t^2$;

Par M. J. LIOUVILLE.

On demande le nombre N des représentations d'un entier donné n, par la forme

$$x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 16t^2.$$

Nous ferons, comme à l'ordinaire, $n = 2^\alpha m$; puis considérant d'une part la somme $\zeta_1(m)$ des diviseurs de m, et d'autre part la somme

$$\sum (-1)^{\frac{i-1}{2}} i$$

relative aux entiers positifs i qui peuvent figurer dans l'équation

$$m = i^2 + 4s^2,$$

ou l'on prend l'entier s (quand il n'est pas nul) avec le double signe $\pm$, j'en tirerai suivant les cas la valeur de N, ainsi qu'on va le voir.

Soit d'abord n impair, $n = m$. On a évidemment $N = 0$ si $m = 8k + 7$. Mais je trouve

$$N = 2\zeta_1(m)$$

si $m = 8k + 3$, et

$$N = \zeta_1(m) + \sum (-1)^{\frac{i-1}{2}} i$$

si $m = 4l + 1$.

Ainsi, pour $m = 3$, on a

$$N = 2\zeta_1(3) = 8:$$

les équations

$$3 = (\pm 1)^2 + 2(\pm 1)^2 + 2.0^2 + 16.0^2$$

et

$$3 = (\pm 1)^2 + 2.0^2 + 2(\pm 1)^2 + 16.0^2$$

confirment ce fait.

Pour $m = 11$, il vient

$$N = 2\zeta_1(11) = 24;$$

et c'est ce que l'on vérifie de même au moyen des équations

$$11 = (\pm 3)^2 + 2(\pm 1)^2 + 2.0^2 + 16.0^2,$$
$$11 = (\pm 3)^2 + 2.0^2 + 2(\pm 1)^2 + 16.0^2,$$
$$11 = (\pm 1)^2 + 2(\pm 1)^2 + 2(\pm 2)^2 + 16.0^2,$$
$$11 = (\pm 1)^2 + 2(\pm 2)^2 + 2(\pm 1)^2 + 16.0^2.$$

Pour $m = 19$, je trouve

$$N = 2\zeta_1(19) = 40;$$

or c'est ce qu'on vérifiera au moyen des équations

$$19 = 1^2 + 2.1^2 + 2.0^2 + 16.1^2,$$
$$19 = 1^2 + 2.3^2 + 2.0^2 + 16.0^2,$$
$$19 = 3^2 + 2.2^2 + 2.1^2 + 16.0^2,$$

en y affectant du double signe les racines des carrés qui ne sont pas nuls et en opérant les permutations convenables.

Passant aux entiers $4l + 1$, je ferai d'abord

$$m = 1 = 1^2 + 4.0^2,$$

et je trouverai $N = 2$, ce qui est évidemment exact.

Pour $m = 5 = 1^2 + 4(\pm 1)^2$, la formule donne

$$N = 6 + 2 = 8.$$

et en effet l'entier 5 a huit représentations contenues dans l'équation

$$5 = (\pm 1)^2 + 2(\pm 1)^2 + 2(\pm 1)^2 + 16.0^2.$$

Enfin pour $m = 9 = 3^2 + 4.0^2$, on a

$$N = 13 - 3 = 10,$$

et cette valeur est bonne, vu les équations

$$9 = (\pm 3)^2 + 2.0^2 + 2.0^2 + 16.0^2,$$
$$9 = (\pm 1)^2 + 2(\pm 2)^2 + 2.0^2 + 16.0^2,$$
$$9 = (\pm 1)^2 + 2.0^2 + 2(\pm 2)^2 + 16.0^2.$$

Soit, à présent, n pair, $n = 2^\alpha m$, $\alpha > 0$. L'équation

$$2^\alpha m = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 16t^2$$

exigeant alors que x soit pair, $x = 2x_1$, revient à celle-ci :

$$2^{\alpha-1} m = y^2 + z^2 + 2x_1^2 + 16t^2,$$

qui a été discutée quelques pages plus haut. De là, pour le nombre N des représentations d'un entier n pair, par la forme actuelle

$$x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 16t^2,$$

les conclusions suivantes.

En prenant n impairement pair, $n = 2m$, on aura

$$N = 2\zeta_1(m)$$

si $m = 4l + 3$; mais

$$N = 2\left[\zeta_1(m) + \sum (-1)^{\frac{i-1}{2}} i\right]$$

si $m = 8k + 1$, et

$$N = 2\left[\zeta_1(m) - \sum (-1)^{\frac{i-1}{2}} i\right]$$

si $m = 8k + 5$.

Pour m divisible par 4, non par 8, $n = 4m$, la forme linéaire de m a aussi de l'influence. On a, dans ce cas,

$$N = 6\zeta_1(m)$$

si $m = 4l + 1$, tandis que

$$N = 2\zeta_1(m)$$

si $m = 4l + 3$.

Mais pour n divisible par 8, non par 16, $n = 8m$, on a toujours

$$N = 12\zeta_1(m),$$

quelle que soit la forme linéaire de m.

Pour n divisible par 16, non par 32, $n = 16m$, il y a de même une seule formule

$$N = 8\zeta_1(m).$$

Enfin pour n divisible par 32, $n = 2^\alpha m$, $\alpha > 4$, on a invariablement

$$N = 24\zeta_1(m),$$

si grand que α puisse devenir.

SUR LA FORME

$$x^2 + y^2 + z^2 + 16t^2;$$

PAR M. J. LIOUVILLE.

La détermination du nombre N des représentations d'un entier donné n ou $2^\alpha m$ (m impair, $\alpha = 0, 1, 2, \ldots$) par la forme

$$x^2 + y^2 + z^2 + 16t^2,$$

dépend, elle aussi, de la somme $\zeta_1(m)$ des diviseurs de m et de la somme

$$\sum (-1)^{\frac{i-1}{2}} i$$

relative aux entiers positifs i qui peuvent figurer dans l'équation

$$m = i^2 + 4s^2,$$

où l'entier s est indifféremment positif, nul ou négatif.

Soit d'abord n impair, $n = m$. On a évidemment

$$N = 0$$

si $m = 8k + 7$; mais je trouve

$$N = 2\zeta_1(m)$$

si $m = 8k + 3$, et

$$N = 3\left[\zeta_1(m) + \sum (-1)^{\frac{i-1}{2}} i\right]$$

si $m = 4l + 1$.

Ainsi, pour $m = 3$, on a

$$N = 2\zeta_1(3) = 8,$$

ce qui s'accorde avec l'équation

$$3 = (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + 16.0^2.$$

Pour $m = 11$, il vient

$$N = 2\zeta_1(11) = 24:$$

les équations

$$11 = (\pm 3)^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + 16.0^2,$$
$$11 = (\pm 1)^2 + (\pm 3)^2 + (\pm 1)^2 + 16.0^2,$$
$$11 = (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 3)^2 + 16.0^2,$$

confirment ce fait.

Pour $m = 19$, on trouve

$$N = 2\zeta_1(19) = 40,$$

ce qui est exact puisque l'on a

$$19 = (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + 16(\pm 1)^2,$$
$$19 = (\pm 1)^2 + (\pm 3)^2 + (\pm 3)^2 + 16.0^2,$$
$$19 = (\pm 3)^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 3)^2 + 16.0^2,$$
$$19 = (\pm 3)^2 + (\pm 3)^2 + (\pm 1)^2 + 16.0^2.$$

Passant aux entiers $4l + 1$, je fais d'abord

$$m = 1 = 1^2 + 4.0^2,$$

et j'ai alors

$$N = 3(1 + 1) = 6,$$

ce qui s'accorde avec l'équation

$$1 = 0^2 + 0^2 + (\pm 1)^2 + 16.0^2,$$

où l'on peut mettre $(\pm 1)^2$ à trois places différentes.

Pour $m = 5 = 1^2 + 4(\pm 1)^2$, notre formule donne

$$N = 3(6 + 2) = 24,$$

et en effet l'équation

$$5 = 0^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 2)^2 + 16.0^2$$

fournit vingt-quatre représentations du nombre 5 en opérant les six permutations que comportent les trois premiers termes du second membre.

Pour $m = 9 = 3^2 + 4.0^2$, la valeur de N est

$$N = 3(13 - 3) = 30 :$$

on la vérifie au moyen des équations

$$9 = 3^2 + 0^2 + 0^2 + 16.0^2,$$
$$9 = 1^2 + 2^2 + 2^2 + 16.0^2,$$

en y affectant du double signe les racines des carrés qui ne sont pas nuls et en opérant les permutations voulues.

Soit, enfin, $m = 17 = 1^2 + 4(\pm 2)^2$. Il viendra

$$N = 3(18 + 2) = 60.$$

Or on s'assure aisément que cette valeur est exacte, au moyen des équations

$$17 = 1^2 + 0^2 + 0^2 + 16.1^2,$$
$$17 = 1^2 + 4^2 + 0^2 + 16.0^2,$$
$$17 = 3^2 + 2^2 + 2^2 + 16.0^2,$$

en y affectant du double signe les racines des carrés qui ne sont pas nuls et en opérant les permutations convenables.

Prenons, en second lieu, n impairement pair, $n = 2m$. On a alors

$$N = 6\zeta_1(m)$$

si $m = 4l + 3$, mais

$$N = 6\left[\zeta_1(m) + \sum (-1)^{\frac{i-1}{2}} i\right]$$

si $m = 8k + 1$, et

$$N = 6\left[\zeta_1(m) - \sum (-1)^{\frac{i-1}{2}} i\right]$$

si $m = 8k + 5$.

Pour n divisible par 4, non par 8, $n = 4m$, on a

$$N = 6\zeta_1(m)$$

si $m = 4l + 1$, mais

$$N = 2\zeta_1(m)$$

si $m = 4l + 3$.

Ici cesse l'influence de la forme linéaire de m. En effet, pour n divisible par 8, non par 16, $n = 8m$, je trouve que toujours

$$N = 12\zeta_1(m).$$

Pour n divisible par 16, non par 32, $n = 16m$, la formule est

$$N = 8\zeta_1(m).$$

Enfin, pour n divisible par 32, $n = 2^\alpha m$, $\alpha > 4$, on a invariablement

$$N = 24\zeta_1(m)$$

si grand que α puisse devenir.

EXPÉRIENCES

SUR

UNE MACHINE HYDRAULIQUE A TUBE OSCILLANT

ET

SUR DES EFFETS DE SUCCION A CONTRE-COURANT, ETC.

APPLICATIONS AUX TRAVAUX PUBLICS ET A LA PHYSIQUE GÉNÉRALE.

Par M. Anatole DE CALIGNY.

Cet appareil, que j'ai exécuté en 1850, à Saint-Germain-en-Laye, où MM. Cagniard de Latour, Clapeyron et d'autres personnes compétentes qui demeuraient alors dans cette ville, le virent marcher, le 3 novembre de la même année, est celui pour lequel j'ai été honoré d'une médaille d'or par la Société centrale d'Agriculture de France, sur le Rapport de M. Combes, en 1852, et sur le Rapport de M. le général Morin, d'une médaille de première classe à l'Exposition universelle de 1855, où il a fonctionné d'une manière suivie. Il a pour but principal d'élever de l'eau au moyen d'une chute, dans des circonstances où le bélier hydraulique n'était point appliqué. Le principe du bélier est un choc. Or c'est précisément ce que j'évite *en ne fermant jamais les sections transversales des tuyaux*. C'est d'ailleurs en vertu d'une espèce particulière de succion à *contre-courant*, auquel les ingénieurs refusent généralement de croire quand ils ne l'ont pas vu, que fonctionne la seule pièce mobile indispensable. Ce phénomène, que j'étudie en ce moment plus en grand, est un complément indispensable aux Mémoires que j'ai publiés dans ce journal.

On sait que, pour les chutes au-dessous de 1 mètre, les constructeurs ne voulaient pas répondre de la marche régulière des béliers hydrauliques. Or, un essai de cet appareil ayant été fait, pour ce cas, avec des tuyaux en planches de $0^m,60$ de diamètre intérieur, il ne reste plus de doute sur la possibilité de le faire construire par tous les charpentiers de village, ce qui est intéressant pour l'agriculture.

L'Administration des Ponts et Chaussées a autorisé un premier essai en grand de ce système, pour vider l'écluse du Rocreul, près Saint-Lô, sur la Vire canalisée, en relevant une partie de l'eau au bief supérieur. Un rapport favorable, rédigé par M. Méquet, inspecteur général des Ponts et Chaussées, déclare que l'appareil d'essai, construit d'ail-

leurs d'une manière très-provisoire, après les oscillations de mise en train a bien marché, abandonné à lui-même, vidant le sas de l'écluse jusqu'au niveau du bief inférieur, et que la Commission *regarde l'essai du Rocreul comme complètement concluant en ce qui concerne l'application pratique de la machine oscillante de M. de Caligny, à de petites chutes et à des élévations moyennes; elle a été singulièrement frappée de la simplicité de l'appareil et de ce qu'il présente d'ingénieux.*

M. le Ministre des Travaux publics a témoigné, par une dépêche, sa satisfaction de ce que les facilités qui m'ont été données par l'Administration pour expérimenter *en grand* ce système *ont été suivies d'un heureux résultat.*

Un essai plus en petit de cet appareil, dans un jardin de Versailles, ayant été mis à la disposition du public pendant plusieurs années, et ayant été visité par beaucoup d'ingénieurs et de personnes compétentes qui ont bien voulu s'inscrire sur un registre, suffit pour montrer qu'il est parfaitement rustique, n'est pas sujet à des réparations fréquentes, même étant construit en minces feuilles de zinc; que les herbes et les vases, etc., le traversent sans l'engorger, d'autant plus qu'il peut être facilement lavé avec toute la force de *chasse* due à la hauteur de chute. M Rumeau, inspecteur général des Ponts et Chaussées, alors ingénieur en chef, et M. Vauchelle, maire de Versailles, ont certifié l'utilité de cet essai et la facilité de la mise en train. M. Rumeau témoigne qu'ayant visité plusieurs fois et *à l'improviste cette machine, il l'a toujours vue fonctionner utilement ou prête à fonctionner de suite et avec régularité en la mettant en train.* On a fait constater sa marche de jour *et de nuit*, qui sera certifiée au besoin par la Société des Sciences naturelles de Seine-et-Oise.

L'essai en grand du Rocreul montre que le niveau d'amont peut baisser sans que l'appareil s'arrête; mais quand ce niveau monte au delà d'une certaine hauteur, on a jusqu'à présent perdu de l'eau par un trop-plein. Il faut un régulateur composé d'une sorte de flotteur pour éviter ce trop-plein, au moins dans certaines limites.

L'inconvénient de ce système, qui paraît d'ailleurs pouvoir être modifié, comme on le verra plus loin, consiste en ce qu'il exige, *dans les essais faits jusqu'à ce jour*, (quand il n'est employé qu'à élever de l'eau), une longueur de tuyau fixe assez grande par rapport à la chute, pour qu'on puisse compter sur un effet utile d'environ 50 pour 100 *en eau élevée.* Cependant un tuyau court n'empêche pas la marche d'être régulière, et des expériences plus en grand que les précédentes, faites aux bassins de Chaillot, auxquelles plusieurs membres de l'Institut m'ont fait l'honneur d'assister, montrent que l'effet utile est encore assez satisfaisant pour des longueurs de tuyau de $0^{m},60$ de diamètre, bien moindres par rapport à la chute que celles qui donnent de meilleurs effets.

On sait d'ailleurs que l'effet utile en *eau élevée* d'une pompe conduite par une roue hydraulique n'est qu'une fraction de fraction, et qu'on ne compte pas alors sur un effet utile de 50 pour 100, du moins quand il s'agit d'élever l'eau à de petites hauteurs pour lesquelles on n'avait pas de pompe convenable.

Sur le Rapport fait au Conseil général des Ponts et Chaussées par MM. les inspecteurs généraux Bommart, Le Breton, et Mary, rapporteur, je suis autorisé à faire, aux frais de l'État, une expérience encore plus en grand sur ce système; le tuyau de conduite a

1 *mètre de diamètre intérieur.* J'en ferai connaître ultérieurement les résultats, qui paraissent très-satisfaisants.

Le Rapport suivant, présenté sur cet appareil en 1852, à la Société centrale d'Agriculture, par M. Combes, au nom de la Section de Mécanique agricole et Irrigations, expose on ne peut plus clairement le nouveau principe, au moyen duquel on pourra simplifier encore une partie des appareils de mon invention publiés dans le *Journal de Mathématiques* [*]. Les phénomènes nouveaux que cet appareil m'a donné occasion d'étudier, sont d'ailleurs susceptibles d'applications intéressantes.

RAPPORT DE M. COMBES SUR LES PREMIÈRES EXPÉRIENCES DE VERSAILLES.

« M. de Caligny a adressé à la Société, le 20 janvier et le 2 mars de cette année, les descriptions de deux machines à élever l'eau, tout à fait différentes des pompes et autres appareils connus destinés au même usage, et qui ne sont pas moins remarquables par la simplicité de leur construction que par la nouveauté des formes et du mode de fonctionnement. Nous ne vous entretiendrons aujourd'hui que de celle qui fait l'objet de la lettre du 20 janvier, parce que c'est la seule que nous ayons pu encore étudier, et qu'elle est, d'ailleurs, la plus importante des deux. Cette machine a pour moteur une chute d'eau ; elle se compose, comme le bélier hydraulique de Montgolfier, d'un tuyau fixe qui prend l'eau d'une source ou bassin supérieur, et d'un tuyau ascensionnel qui reçoit une partie de l'eau amenée par le tuyau fixe, laquelle vient se déverser au sommet de ce tuyau, tandis que l'autre partie s'est écoulée dans un canal de décharge. Ici finit l'analogie avec le bélier. Dans la machine de M. de Caligny, il n'existe ni soupape d'*arrêt* ni soupape d'*ascension;* partant, point d'arrêt brusque ni de choc de la colonne d'eau en mouvement contre les parois du tuyau. Lorsque l'eau ne doit être élevée qu'à une hauteur médiocre au-dessus du canal de décharge, le tuyau vertical ascensionnel est mobile. Il est suspendu, par sa partie supérieure, à l'un des bras d'un balancier dont l'autre bras est chargé d'un poids plus grand que le sien, et qui tend, par conséquent, à le tenir soulevé jusqu'à une hauteur limitée par un arrêt fixe. Lorsqu'il occupe cette position, il existe, entre son extrémité inférieure et l'orifice du tuyau fixe, dont le bout se relève verticalement au-dessous du premier, un intervalle par lequel l'eau, venant du bassin supérieur, s'écoule dans le canal de décharge. A un certain moment, par suite d'une force qui se développe sous l'influence du mouvement de l'eau, et que M. de Caligny compare à une succion, le tuyau mobile descend, en soulevant le contre-poids, et vient s'appliquer, par un anneau dont il est garni à sa base, sur un siége formant rebord horizontal autour de l'orifice du tuyau fixe. Dans cette

[*] J'ai publié en 1850, dans le *Technologiste*, un Mémoire intitulé : Résumé succinct des expériences de M. Anatole de Caligny sur une branche nouvelle de l'hydraulique, avec planche. Ce Mémoire contient surtout le résumé de ceux que j'avais publiés dans le *Journal de Mathématiques*. On y trouverait au besoin les figures qui pourraient être utiles pour comprendre plus facilement les Mémoires dont il s'agit. Il a été tiré à part en mai 1850, et ne contient que le résumé de mes *expériences* antérieures à cette époque. (Voir aussi le *Musée belge*, t. XXIX, p. 194, 1856, etc.)

situation, il n'y a plus de solution de continuité entre les deux tuyaux; la colonne d'eau en mouvement dans le tuyau fixe monte, en vertu de la force vive dont elle est animée, dans le tuyau ascensionnel, qu'elle remplit complétement, et vient se déverser, par son orifice supérieur qu'on a eu soin d'évaser, dans un récipient annulaire, duquel partent des tuyaux de distribution. Au moment où le déversement cesse, la totalité de l'appareil, composé des tuyaux fixe et ascensionnel, se trouve remplie d'eau à l'état de repos, et comme l'orifice du tuyau ascensionnel est au-dessus du niveau de l'eau dans le bassin supérieur, il se produit une *oscillation en retour* du tuyau ascensionnel vers la source ou bassin supérieur.

» Si la hauteur et la capacité intérieure du tuyau ascensionnel sont convenablement proportionnées, l'oscillation en retour sera terminée, et la vitesse de la colonne d'eau redevenue nulle, au moment où la surface de l'eau sera arrivée, dans le tuyau ascensionnel, à peu près à la hauteur du niveau de l'eau dans le canal de décharge. A cet instant, le tuyau ascensionnel est soulevé de nouveau par l'action du contre-poids; une nouvelle période de mouvement, entièrement semblable à la première, commence, et ainsi de suite indéfiniment.

» Pour mieux faire comprendre les circonstances et les causes du jeu régulier de la machine dont nous venons de donner une description générale, nous indiquerons les dimensions de la machine d'essai établie par M. de Caligny dans un jardin maraîcher des environs de Versailles, et que les membres de votre Section de Mécanique agricole ont vue fonctionner. Les produits de quelques petites sources sont retenus dans un bassin par une digue, au bas de laquelle est un fossé qui sert de canal de décharge. La hauteur des eaux dans le bassin au-dessus du canal est d'environ $0^{m},70$. Un tuyau en zinc de $11^{m},20$ de longueur et $0^{m},20$ de diamètre intérieur, traverse la digue et reçoit l'eau du bassin par un orifice évasé, au devant duquel est placé un grillage grossier. Ce tuyau, couché horizontalement, ou avec une faible inclinaison, dans le fossé, se recourbe près du bout par un coude arrondi, de manière que l'axe ait la direction verticale; son orifice d'écoulement se trouve à $0^{m},35$ environ au-dessous du niveau de l'eau dans le fossé. Autour du bout relevé verticalement est un petit massif de maçonnerie, arasé horizontalement à la hauteur de l'orifice; le rebord de cet orifice, formant le siége sur lequel vient s'appliquer le collet en forme de bride, fixé à la base du tuyau ascensionnel, est dans le plan supérieur de la maçonnerie. Le tuyau ascensionnel est également en zinc; il a $2^{m},13$ environ de longueur totale et un diamètre intérieur de $0^{m},23$. Le diamètre de son orifice inférieur est $0^{m},20$ comme celui de l'orifice du tuyau fixe sur lequel il doit s'appliquer exactement. A partir du bas est ménagé un évasement graduel qui porte le diamètre à $0^{m},23$, ainsi que nous l'avons dit. Son orifice supérieur par lequel l'eau doit se déverser, est évasé. Sa partie centrale, dans le haut, est occupée par un cylindre plein et fixe, de $0^{m},165$ de diamètre, terminé en pointe vers le bas, qui descend jusques un peu au-dessous du niveau de l'eau dans le bassin supérieur, c'est-à-dire d'environ $1^{m},14$ dans l'intérieur du tuyau, et réduit la section de la colonne d'eau en mouvement, sur cette hauteur, à une surface annulaire de $0^{m},165$ de diamètre intérieur et $0^{m},23$ de diamètre extérieur. La limite supérieure de l'excursion du tuyau

mobile ascensionnel, ainsi que la quotité du contre-poids, peuvent être réglées à volonté. L'orifice inférieur est entouré, avons-nous dit, d'un collet qui doit s'appliquer exactement sur le siége formant rebord autour de l'orifice du tuyau fixe; ce collet lui-même se prolonge en une surface annulaire, convexe vers le bas et à bords retroussés, comme le seraient ceux d'un parapluie renversé. Le diamètre total de ce bord en surface courbe est de $0^m,45$.

» Lorsque la machine ne doit pas fonctionner, on arrête le balancier auquel sont impendus le tuyau mobile et le contre-poids, de manière à soulever ce dernier. Le tuyau mobile reposant alors sur son siége par l'effet de son propre poids, l'écoulement des eaux vers le canal de décharge est interrompu. Pour mettre la machine en jeu, il suffit de rendre la liberté au balancier et, au besoin, d'agir avec la main dans le même sens que le contre-poids, pour soulever le tuyau mobile. L'eau motrice sort alors par l'intervalle entre celui-ci et le tuyau fixe. Quand elle a pris une vitesse d'écoulement suffisante, le tuyau vertical, tiré vers le bas, descend en soulevant le contre-poids, s'applique sur son siége, et le fonctionnement est régulièrement établi.

» Dans l'expérience à laquelle nous avons assisté à Versailles, le jeudi 25 mars dernier, la hauteur de chute était de $0^m,677$; l'eau était élevée à $1^m,05$ au-dessus du niveau dans le bassin de retenue, et par conséquent à $1^m,727$ au-dessus du niveau dans le fossé servant de canal de décharge. Le rebord du tuyau fixe formant siége du tuyau mobile était de $0^m,376$ en contre-bas du niveau de l'eau dans le fossé; la levée du tuyau ascensionnel était limitée à $0^m,059$. Chaque période complète de mouvement de la machine durait régulièrement huit secondes, et fournissait un peu plus de 12 litres d'eau élevés à $1^m,05$ au-dessus de la source. Le tuyau ascensionnel restait appliqué sur son siége pendant quatre secondes, temps pendant lequel l'eau motrice n'allait point au canal de décharge. (D'après des observations postérieures qui ont été faites par M. de Caligny, en présence de plusieurs personnes, et qu'il nous a communiquées, la durée de l'élévation du tuyau ascensionnel est de $0^s,6$: il reste stationnaire au sommet de sa course pendant deux secondes, temps pendant lequel l'orifice d'écoulement vers le canal de décharge est complétement ouvert; enfin il emploie $1^s,4$ à redescendre.) Nous n'avions malheureusement aucun moyen de mesurer le volume d'eau dépensé à chaque période, et par conséquent nous ne saurions indiquer le rapport de l'effet utile au travail dépensé. Il est juste d'observer que la machine a été abandonnée, sans qu'on en ait pris soin, pendant tout l'hiver, qu'elle a pu subir quelques avaries, qu'il est assez probable que les garnitures des collets des tuyaux fixe et mobile ne sont point en bon état et ne procurent pas une occlusion parfaite. M. de Caligny déclare que, dans des expériences faites avant l'hiver, le volume d'eau élevé sous la même chute, à chaque période, était de 16 litres au lieu de 12, ainsi que nous l'avons trouvé. La diminution du produit serait la conséquence des avaries. Nous n'avons pu vérifier ces faits [*].

» Revenons maintenant sur les circonstances et les causes du jeu de la machine, et à

---

[*] J'ai voulu dire que j'avais trouvé un volume de 16 litres à chaque période, la chute motrice

cet effet considérons d'abord l'appareil au moment où le déversement vient de cesser à la partie supérieure du tuyau ascensionnel et où l'oscillation en retour vers la source va commencer. Il est aisé de reconnaître que, en raison des dimensions que M. de Caligny a données au vide intérieur du tuyau ascensionnel, cette oscillation en retour doit se terminer à très-peu près, lorsque la surface de l'eau, dans le tuyau vertical, est arrivée au niveau ou un peu au-dessous du niveau de l'eau dans le fossé de décharge. A ce moment, si le tuyau ascensionnel est exactement équilibré par le contre-poids, il doit commencer à se soulever; car il n'existe plus, dans son intérieur, une colonne d'eau qui, par sa pression sur la paroi évasée contiguë à son orifice inférieur, tende à le maintenir appliqué sur son siége. Il se lève lentement, puisqu'il emploie à peu près $\frac{6}{10}$ de seconde à parcourir $0^{m},06$. Il reste stationnaire au sommet de son excursion pendant deux secondes; l'orifice d'écoulement est alors ouvert en plein; l'eau s'écoule au fossé de décharge avec une vitesse graduellement croissante (on peut s'assurer, par le calcul, que sa vitesse finale doit être à peu près de $1^{m},146$ par seconde). Alors se manifestent les effets de cette force qui sollicite le tuyau ascensionnel vers le bas, et le détermine à descendre, force qui procure, en réalité, le jeu spontané de la machine, et donne à l'œuvre de M. de Caligny un caractère incontestable de nouveauté. Elle peut être due en partie à l'ascension de l'eau jaillissante du tuyau fixe dans le tuyau ascensionnel, qui presse, en vertu de son poids et du mouvement curviligne des filets, la paroi intérieure évasée contiguë à l'orifice; mais elle a aussi sa source dans l'action que l'eau, qui s'écoule dans le canal de décharge, exerce sur le rebord, en forme de parapluie renversé, adapté autour du collet inférieur du tuyau ascensionnel. L'influence de ce rebord a été constatée par les expériences directes de M. de Caligny. Il fait remarquer que le fait dont il s'agit a des analogues dans le phénomène de la diminution de pression sur les parties voisines des bords de la face antérieure d'un prisme exposé au choc d'une eau courante, qui a été observé par Du Buat, et dans celui de la pression dite *négative*, cause de l'augmentation de dépense par les ajutages coniques divergents. Quoi qu'il en soit des causes que nous ne voulons pas discuter ici, la force développée est progressivement croissante, ainsi que le prouve la lenteur avec laquelle le tuyau descend, en soulevant le contre-poids; il met $1^{s},4$ à parcourir $0^{m},06$. Cette lenteur est à la fois un avantage et un inconvénient: un avantage, parce qu'elle prévient des chocs destructeurs; un inconvénient, parce que l'eau, continuant à couler dans le canal de décharge par un orifice qui devient de plus en plus petit, prend une vitesse qui approche de plus en plus de celle qui est due à la charge totale de l'eau en amont de cet orifice. La chute de l'eau qui est sortie par un orifice rétréci contribue ainsi très-peu à augmenter la vitesse de la colonne contenue dans le tuyau et, par suite, est à peu près entièrement perdue pour l'effet utile. Il nous paraît donc certain que, si la descente du tuyau était rendue plus

---

étant un peu plus forte et la hauteur de versement un peu moindre qu'à l'époque dont parle M. Combes. La chute ordinaire, comme il le dit plus haut, était de $0^{m},70$ quand j'avais opéré avant l'hiver.

(*Note de l'Auteur.*)

rapide comme elle le serait par la suppression momentanée, totale ou partielle, du contre-poids, l'effet utile de la machine serait sensiblement amélioré.

» M. de Caligny a construit, à l'aide d'un fonds peu considérable mis à sa disposition par M. le Ministre des Travaux publics, une machine d'essai de très-grande dimension semblable à celle de Versailles, et l'a appliquée à relever, dans le bief supérieur d'un canal, une partie de l'eau provenant de la vidange du sas. Les essais ont été faits près de Saint-Lô, sur la Vire canalisée. Le tuyau de conduite avait ici 17 mètres de longueur et $0^m,625$ de diamètre; le diamètre du tuyau ascensionnel était de $0^m,73$. Tous deux étaient en zinc. La machine a fonctionné régulièrement, sans choc nuisible. Les essais ont été interrompus par la saison rigoureuse.

» Les détails dans lesquels nous sommes entré mettent en évidence le caractère de nouveauté propre à la machine imaginée par M. de Caligny, et la simplicité extrême de sa construction, qui nous paraît surtout devoir lui mériter les suffrages de la Société d'Agriculture; ils montrent aussi les études et les expériences nombreuses, qui restent à faire à l'inventeur, pour déterminer les formes les plus avantageuses des diverses parties de sa machine, les conditions les plus favorables à son établissement sous diverses chutes et pour des élévations d'eau à des hauteurs plus ou moins considérables par rapport à la chute motrice, enfin le rapport du travail utilisé au travail dépensé dans chaque cas. Nous avons l'espérance qu'il complétera son œuvre, et nous vous proposons de lui décerner, à titre d'encouragement, votre médaille d'or à l'effigie d'Olivier de Serres, pour l'invention de la machine à élever l'eau, dont il a établi un spécimen, qui fonctionne régulièrement dans un jardin maraîcher, boulevard Saint-Antoine, 23, près Versailles, en lui réservant, d'ailleurs, tous ses droits pour l'avenir, aux récompenses d'un ordre plus élevé, dont la Société dispose. »

« Ces conclusions sont adoptées. »

Avant d'entrer dans de nouveaux détails, je crois utile de transcrire aussi le procès-verbal, d'ailleurs entièrement inédit, d'une expérience beaucoup plus en grand faite aux bassins de Chaillot.

NOTE DE M. COROT SUR DES EXPÉRIENCES FAITES PAR M. DE CALIGNY AUX BASSINS DE CHAILLOT SUR SA MACHINE ÉLÉVATOIRE A TUBE OSCILLANT.

« Dans le courant de l'année 1852, M. de Caligny fit établir dans l'un des anciens » bassins de Chaillot un appareil hydraulique de son invention. Cet appareil se com» posait d'abord d'une conduite ayant une longueur développée de 38 mètres et dis» posée en grande partie horizontalement sur le fond du bassin; la conduite était for» mée par des tuyaux en fonte de $0^m,60$ de diamètre intérieur. L'une des extrémités » de la conduite se relevait à angle droit et pénétrait verticalement dans le fond d'une » cuve en bois de $3^m,10$ de diamètre, et placée de manière à pouvoir être remplie à une » hauteur d'environ $1^m,50$ au-dessous du niveau d'un réservoir voisin du premier, et » qui servait de bief supérieur pour l'alimentation de la machine; l'autre extrémité de » la conduite se relevait également à angle droit jusqu'à un plancher horizontal en bois, » établi dans le bassin, où était placée la conduite; au niveau de ce plancher une ron-

» delle en cuivre ajustée et de $0^m,57$ de diamètre était fixée sur la bride en fonte, terminant la partie verticale de la conduite de $0^m,60$ de diamètre. Sur la rondelle en cuivre reposait librement un tuyau également en cuivre, et portant à sa partie inférieure une rondelle pareille à celle qui était fixée sur la conduite en fonte; ce tuyau en cuivre s'évasait en remontant sur une longueur de $0^m,50$ et en passant d'un diamètre de $0^m,58$ à un diamètre de $0^m,78$; ce dernier diamètre était conservé sur une longueur de $1^m,90$, puis raccordé au moyen d'une partie conique de $0^m,30$ de longueur avec un tuyau d'un diamètre de $0^m,67$, persistant sur une longueur de $1^m,70$. Enfin, le tuyau qui avait 5 mètres de hauteur totale se terminait à sa partie supérieure par un entonnoir de $0^m,60$ de hauteur et de $0^m,88$ de diamètre à son extrémité la plus élevée; sur cet entonnoir était fixée une cuvette annulaire munie d'une goulotte, au moyen de laquelle l'eau remontant dans le tuyau vertical était versée dans un réservoir indépendant

» A la partie inférieure du tuyau vertical était fixé un cône en forme de parapluie renversé de $0^m,415$ de longueur suivant la génératrice et se relevant verticalement à la circonférence extérieure de $0^m,15$.

» Le tuyau vertical, reposant librement sur l'extrémité de la conduite en fonte avec laquelle il faisait joint par le moyen des rondelles en cuivre, pouvait être soulevé par l'intermédiaire d'un balancier à l'un des bouts duquel il était fixé et qui portait au bout opposé un contre-poids équilibrant et au delà le poids du tuyau.

» Pour mettre l'appareil en mouvement, il fallait commencer à soulever à la main le tuyau vertical en agissant sur l'extrémité du levier indiqué précédemment; l'eau alors se mettait à couler en vertu de la charge motrice entre l'extrémité de la conduite en fonte et le bout du tuyau mobile soulevé. Après le temps nécessaire pour que la veine sortante atteignît la vitesse convenable, on laissait retomber le tuyau mobile sur le tuyau fixe; l'intervalle se fermait; l'écoulement s'arrêtait, et l'eau, en vertu de la vitesse acquise, s'élevait dans le tuyau vertical, de manière à déverser par-dessus les bords de l'orifice supérieur. Puis, la vitesse d'ascension venant à cesser, la masse d'eau contenue dans le tuyau mobile refluait par la conduite en fonte vers le bief supérieur. Dès que le tuyau mobile était convenablement évacué par l'eau, c'est-à-dire quand le niveau dans ce tuyau était devenu inférieur au point où commence le renflement, le contre-poids placé à l'extrémité du balancier, et qui était plus lourd que le poids du tuyau vide, faisait remonter ce tuyau, et l'ouverture annulaire au-dessus de la conduite en fonte se trouvait de nouveau démasquée; l'écoulement recommençait, et quand une certaine vitesse était atteinte, un phénomène de succion, dû probablement à l'augmentation de vitesse de la veine fluide, s'échappant entre les surfaces du parapluie renversé et du plancher, déterminait une attraction de haut en bas, qui devenait supérieure à l'excédant du contre-poids, et précipitait le tuyau mobile sur l'orifice de la conduite en fonte. Le tuyau mobile, quand le mouvement de retour de la colonne liquide précédemment indiqué avait eu lieu, était de nouveau soulevé par le contre-poids, et ses alternatives de montée et de descente se produisaient d'elles-mêmes et régulièrement.

» Dans le courant de l'année 1853, une expérience eut lieu en présence de M. Dupuit, alors ingénieur en chef, directeur du service municipal de la ville de Paris; de » MM. Piobert, Combes et Cagniard de Latour, membres de l'Institut; de M. Guichard, » inspecteur général; de M. Bélanger, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, et de » M. Corot, ingénieur civil. L'expérience fut prolongée pendant une heure; la chute » moyenne, conservée sans variation trop notable, était de $1^m,74$ entre le niveau moyen » dans la cuve de prise d'eau et le niveau du bief d'aval; la hauteur ascensionnelle » était de $2^m,72$ entre le point de versement à la partie supérieure du tuyau mobile et » le niveau dans la cuve de prise d'eau; la quantité d'eau élevée fut de 85 mètres cubes » et la quantité d'eau dépensée fut de 355 mètres cubes, d'où résulterait un effet utile » de 0,34 [*] du travail moteur en eau élevée.

» Il convient d'ajouter qu'indépendamment de l'imperfection inséparable de l'installation d'un appareil d'essai, deux circonstances surtout ont dû amoindrir le résultat utile. D'abord le versement, par la partie supérieure du tuyau mobile, avait » lieu précisément pendant la période d'abaissement du niveau dans la cuve, et comme » l'abaissement total était d'environ $0^m,44$, il aurait probablement été convenable » d'augmenter la hauteur de versement de la moitié de l'abaissement dans la cuve, soit » de 0,22, et cette hauteur aurait été de 2,94, au lieu de 2,72.

» Puis il n'a pas été possible d'obtenir le volume d'eau sur lequel on avait cru pouvoir compter. Il en est résulté que les organes de l'appareil avaient des dimensions » trop considérables; il a fallu, pour y remédier autant que possible, insérer dans le » tuyau mobile une pièce de bois destinée à diminuer sa section libre. Il est infiniment » probable qu'il en est résulté un trouble préjudiciable pour le rendement.

» Paris le 27 mai 1858. *Signé* J. Corot, ingénieur civil, ex-inspecteur des machines » du service municipal de la ville de Paris.

» Vu et approuvé par le soussigné, ancien directeur du service municipal. Paris, le » 28 mai 1858. *Signé* Dupuit.

» Je certifie que j'ai asssisté à l'expérience dont les résultats sont rapportés dans » cette Note et qu'elle contient un exposé exact des faits observés. *Signé* Ch. Combes. »

Observations sur ce procès-verbal et sur quelques autres expériences.

En général, quand le bassin servant de bief d'amont n'a pas assez d'étendue pour que le niveau ne soit pas assez sensiblement constant, il faut tenir compte de ce que, pour tous les appareils de ce genre, c'est-à-dire seulement pour ceux où la force vive s'emmagasine dans une colonne liquide d'une manière analogue à ce qui se passe dans le bélier hydraulique avant la fermeture de la soupape d'arrêt, la vitesse dans cette colonne

[*] Il y a une légère faute de transcription dans un chiffre de l'effet utile qui est, d'après les données admises, de 0,37 au lieu de 0,34. On trouve en effet $2,72 \times 85 = 231,20$ et $355 \times 1,74 = 617,70$. L'effet utile est donc, d'après les données admises dans le procès-verbal, de 0,37 plus une fraction. Un 4 a été mis au lieu d'un 7 dans la copie. (*Note de l'Auteur.*)

liquide augmentant de plus en plus, il se débite plus d'eau, *pour qu'une vitesse donnée soit obtenue*, à l'époque où le niveau est baissé dans cette espèce de bief d'amont qu'à l'époque où il y est le plus élevé. Il en résulte que *la véritable moyenne des hauteurs d'où l'eau motrice descend est moindre* que la moyenne des hauteurs du niveau dans ce bief d'amont au-dessus du niveau d'aval, depuis l'origine du mouvement jusqu'à l'époque où la vitesse de sortie au bief d'aval est arrivée à son maximum.

Connaissant à peu près la manière dont la vitesse de sortie de l'amont à l'aval varie à chaque instant, il est aisé d'en conclure approximativement la hauteur véritable d'où le centre de gravité de l'eau motrice descend au bief d'aval.

Quand le niveau de ce dernier bief n'est pas non plus constant, il est juste aussi de tenir compte de ce que cela influe sur la véritable hauteur de chute comparée à ce qu'elle serait si ce bief était indéfini. Si la chute diminue, il faut à chaque période plus d'eau pour engendrer une vitesse donnée, et il en résulte que la chute motrice moyenne est moindre que la moyenne entre les hauteurs du niveau d'amont, supposé indéfini, au-dessus du niveau d'aval.

Quant à l'expérience précédente, si ces considérations ont peu d'importance, elles viennent cependant à l'appui de ce que dit M. Corot, que, dans le calcul de l'effet utile, on devrait admettre, par suite des variations de niveau, une notable augmentation dans le chiffre du résultat définitif tel qu'il le donne. Or, comme je l'ai démontré en note par un calcul d'arithmétique, il y a une légère faute de transcription, de sorte qu'on peut admettre en nombre rond d'après le procès-verbal, un effet utile *d'au moins* 40 pour 100 *en eau élevée,* dans l'expérience dont il s'agit. On approcherait même beaucoup de ce chiffre quand même cette faute de transcription n'existerait pas.

Ainsi que le remarque M. Corot, la pièce de bois fixe destinée à rétrécir la section du tuyau vertical était une cause de perte de travail, en ce sens qu'elle n'avait pas été unie et taillée avec assez de soin, étant formée en partie de planches clouées sur un arbre de section quadrangulaire de $0^{m},30$ sur $0^{m},285$. Elle s'enfonçait d'ailleurs trop profondément dans le coude, où le diamètre de la partie inférieure arrondie en pointe était encore de $0^{m},14$ à la hauteur de l'orifice de sortie. La partie de cette pièce de bois qui s'élevait au-dessus du niveau d'amont avait une section octogone de $0^{m},46$ de diamètre prise entre deux faces parallèles; cette partie avait $2^{m},80$ de long, elle s'élevait au-dessus du tuyau et se raccordait d'ailleurs supérieurement et inférieurement avec l'arbre de section rectangulaire.

Cette pièce de bois avait pour but de diminuer le chemin parcouru par les résistances passives dans la conduite pendant toute l'époque où le tuyau mobile était baissé. Cependant elle n'a pas sensiblement augmenté l'effet utile en général, mais c'est bien moins, selon moi, à cause des irrégularités remarquées par M. Corot que par suite de la diminution de durée qui en est résultée pour chaque période; de sorte que dans un même temps donné le tuyau mobile a fonctionné un plus grand nombre de fois, en restant d'ailleurs moins longtemps levé à sa hauteur maximum. La durée de chaque période était de dix-sept secondes et demie sans la pièce de bois fixe et de quatorze secondes et demie avec cette pièce de bois, les quantités d'eau débitées étant sensiblement les mêmes. Or si

à chaque période l'appareil a été obligé de débiter moins d'eau pour en débiter la même quantité dans un temps donné, et si cette diminution de débit a compensé relativement à l'effet utile l'avantage, facile à calculer malgré les rétrécissements, de diminuer le travail en résistances passives provenant du frottement, cela prouve que, si l'on avait eu assez d'eau pour en débiter autant à chaque période que dans le cas où la pièce de bois était supprimée, on aurait eu une augmentation d'effet utile.

A la fin des expériences, quand les besoins du service ont obligé de reprendre les tuyaux qui m'avaient été prêtés, je me suis aperçu trop tard d'un moyen, d'ailleurs très-fatigant, d'en faire l'essai; je laissais à chaque période baisser beaucoup plus l'eau dans la cuve d'amont, et j'obtenais ainsi quelques périodes débitant beaucoup plus d'eau : j'ai cru trouver de cette manière une augmentation notable *d'effet utile*, mais je n'ai pu répéter assez les essais auxquels je ne crois jamais quand je ne les ai pas reproduits un certain nombre de fois. On conçoit d'ailleurs que la baisse du niveau d'amont qui en résultait changeait les conditions du système.

Il est facile de démontrer, en faisant le calcul des résistances passives, qu'on devrait augmenter notablement l'effet utile en augmentant convenablement la quantité d'eau motrice. La comparaison des effets obtenus avec ou sans la pièce de bois fixe est déjà un premier moyen de vérification positive. Parmi les imperfections de ce grand modèle, je remarquerai que le tuyau mobile n'était guidé au sommet que par des chaînes de suspension ; de sorte qu'il se balançait un peu comme un arbre agité par le vent et perdait de l'eau entre lui et son siége fixe, par cette raison qui s'est retrouvée dans tous les modèles décrits dans cette Note, parce qu'*on voulait les faire rustiques*. Cet inconvénient est supprimé dans le grand modèle où le tuyau fixe a 1 mètre de diamètre. Quant à cette expérience, il faut aussi remarquer que par économie on avait attaché au tuyau mobile le vase annulaire qui recevait l'eau élevée, laquelle ne s'échappait que par une goulotte, en faisant un peu trop gonfler l'eau au sommet. Enfin cette pièce augmentait la masse du tuyau mobile. On a remarqué à la fin des expériences que l'angle de convergence du *parapluie renversé* s'était sensiblement ouvert, n'étant pas assez solidement construit, ce qui peut avoir diminué l'effet utile.

J'ai fait aux bassins de Chaillot des expériences variées sur ce système, le tuyau fixe ayant 60 centimètres de diamètre intérieur, la chute variant de $2^{m},50$ à 1 mètre, et le tuyau vertical mobile ayant toujours 5 mètres de haut. Cette machine a fonctionné régulièrement dans diverses conditions. Ce genre d'appareil a marché, sans s'arrêter, le niveau baissant en amont et montant en aval dans des limites très-étendues. Mais comme l'oscillation en retour doit descendre assez bas pour que le tuyau mobile se soulève de lui-même, il ne faut pas que le niveau en amont s'élève au-dessus d'une certaine limite pour chaque appareil. Je reviendrai plus loin sur ce sujet. Quant à l'effet utile, il était notablement diminué à Chaillot, lorsque la chute motrice n'était plus que de 1 mètre. Les conditions étaient d'ailleurs alors changées, même relativement à une oscillation en retour, devenue trop forte par rapport à cette chute.

Mais la nouvelle pompe à feu de Chaillot n'ayant pas été construite, comme on l'avait espéré, avant l'époque où l'on a eu besoin, pour le service des eaux de Paris,

des gros tuyaux de conduite qui m'avaient été prêtés, la quantité d'eau élevée par l'ancienne pompe à feu aux bassins de Chaillot n'a pas été suffisante pour étudier complétement le système (*voir* ci après la note des p. 194 et 195.)

Au reste, quand même pour ces dimensions on n'aurait qu'un effet utile en *eau élevée* d'environ 40 pour 100, ce résultat serait encore assez intéressant pour être signalé, à cause de la simplicité de ce grand appareil.

J'ai pris le parti de recommencer à Versailles, au bassin de Picardie, avec un tuyau de conduite de 25 centimètres de diamètre et de 30 mètres de long, etc. J'ai constaté qu'en modifiant convenablement la longueur du tuyau de conduite et proportionnant mieux la quantité d'eau motrice aux dimensions de l'appareil, on augmentait notablement l'effet utile, l'orifice se fermait plus vite et restait plus longtemps tout ouvert.

Je n'entre pas encore dans les détails, espérant obtenir mieux dans une autre localité où je pourrai varier davantage les quantités d'eau motrice. Mais je n'ai pas cru devoir attendre de nouvelles expériences avant d'annoncer que j'ai observé une augmentation notable d'effet utile, quoique ce fût sur une *chute moindre que 40 centimètres, en élevant l'eau au quadruple de la chute au-dessus du bief d'aval*. Cette augmentation de hauteur a été obtenue au moyen d'un renflement du tuyau mobile dans la partie inférieure au niveau du bief d'amont, et par le rétrécissement de la section de la partie supérieure de ce tuyau au moyen du cylindre fixe, qui donnait lieu, il est vrai, à une augmentation de frottement dans l'espace annulaire resté libre entre ce cylindre et ce tuyau. C'est une des raisons pour lesquelles il est utile que le tuyau fixe horizontal soit assez long quand on veut élever l'eau assez haut par rapport à la chute motrice, selon la théorie exposée dans mes précédents Mémoires [*].

Pour les grandes chutes, l'utilité de l'application de ce nouveau système n'est pas encore aussi incontestable, à cause des dimensions qu'il faudrait lui donner, ce qui diminuerait les avantages de sa simplicité ; tandis que pour les petites chutes auquelles on n'appliquait pas le bélier, il peut être construit en matériaux très-peu résistants, puisqu'il n'y a aucun *coup de bélier* possible. Ainsi un appareil dont le tuyau fixe avait 60 centimètres de diamètre et 13 mètres de long a été essayé avec des tuyaux quadrangulaires formés tout simplement de planches en bois blanc, et a fonctionné jour et nuit. La chute a varie de 50 à 8 centimètres, l'eau étant élevée à $1^{m},50$ au-dessus du niveau du bief d'aval. J'ai fait marcher l'appareil régulièrement avec une chute de 8 centi-

---

[*] La tête de l'appareil était, avec quelques modifications, la même que celle sur laquelle M. Combes avait fait des observations à Versailles, mais on avait de plus un moyen de jaugeage, celui précisément qui était employé à ce bassin par l'administration des eaux de Versailles pour jauger l'eau amenée par la machine de Marly jusqu'en 1855. Pour 52 pouces d'eau débitee, et une levée de $0^{m},13$ environ, la periode durant quinze secondes, le tube mobile était entièrement levé pendant six secondes, entièrement baissé pendant six secondes; il se levait en deux secondes, se baissait en une seconde. Le retrécissement de la section annulaire diminue le chemin du frottement dans le tuyau horizontal, la durée de l'oscillation en retour et celle de l'ascension. Le temps perdu etant moindre, la vitesse moyenne est diminuée dans ce tuyau, et la perte de travail etant moindre, *dans certaines limites on peut élever l'eau plus haut avec un meilleur effet utile.*

mètres, mais ce n'est pas moi-même qui, pour cette limite, ai constaté le versement au sommet : ce versement était d'ailleurs peu important; mais pour une chute de $0^m,40$ il était de 600 litres au moins à chaque minute.

Parmi les applications dont ce système est susceptible, exclusivement à d'autres, j'ai déjà signalé ci-dessus le cas où l'on vide une écluse de navigation, en relevant une partie de l'eau au bief supérieur, en rappelant que l'Administration des Ponts et Chaussées en a fait en 1851 un essai provisoire satisfaisant. Pour se rendre compte de la difficulté, il faut se rappeler que l'opération doit se faire très-vite, et que l'appareil doit marcher malgré la variation des hauteurs du niveau dans l'écluse qui se vide, ce qui n'a pas empêché d'obtenir une marche régulière, la quantité d'eau motrice descendue à chaque période pouvant alors varier en sens contraire de ces hauteurs. Le grand tuyau fixe de cet appareil, mentionné dans le Rapport de M. Combes, n'était cependant formé, pour cette expérience, que de feuilles de zinc n° 23, c'est-à-dire d'environ 2 millimètres d'épaisseur.

Ce système peut être appliqué comme moteur hydraulique lorsque, au lieu de l'employer à élever l'eau, on l'emploie à relever alternativement un flotteur qui agit en redescendant sur une résistance à vaincre. Un autre moteur hydraulique de mon invention à flotteur oscillant, a été l'objet de deux Rapports favorables à l'Institut (*voir* le t. XII de ce Journal, p. 347).

Le jury international de l'Exposition universelle de 1855 a fait faire au Conservatoire des Arts et Métiers des expériences sur un modèle très-imparfait de cet appareil, considéré seulement comme élévatoire, ayant un tuyau de conduite de $0^m,25$ de diamètre intérieur, mais d'une longueur un peu moindre qu'au bassin de Picardie; j'avais d'ailleurs, pour varier l'étude, fait quelques modifications qu'on n'eut pas le temps d'étudier. Ce fut pour cet appareil que la médaille de première classe me fut décernée.

On lit dans le Rapport : « M. de Caligny (n° 911), ..., a exposé un appareil » hydraulique du genre des béliers, *mais dans lequel il ne se produit pas de choc apparent* et dont la construction simple et peu dispendieuse permet de l'appliquer aux » besoins de l'agriculture. Des expériences faites au Conservatoire des Arts et Métiers » ont constaté que cet appareil donnait un rendement de 43 pour 100 du travail du » moteur dépensé.... » [*]

---

[*] Je n'ai pas le procès-verbal du jury, mais j'avais fait sur le même appareil une expérience qui en diffère très-peu. M. Andral, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, avait la bonté d'observer le niveau d'amont, tandis que M. Courbebaisse, aujourd'hui ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, qui voulut bien aussi m'aider, observait les mouvements du tuyau mobile, et comptait le nombre de périodes, qui fut de soixante en dix minutes. La chute motrice moyenne était de $0^m,515$, la hauteur du versement au-dessus du niveau moyen du bief d'amont était de $0^m,875$. L'appareil débitait 4 mètres cubes d'eau en dix minutes. La quantité d'eau tombée au bief d'aval était sensiblement le quadruple de celle qui était élevée. Chaque période durant dix secondes, la durée du temps où le tuyau était sur son siége était d'un peu plus de quatre secondes. Il était intéressant surtout de connaître quelle était *pendant ce temps* la quantité d'eau inutilement descendue au bief d'aval par les fissures. J'ai arrêté complétement l'appareil, et, pendant six minutes, la quantité d'eau perdue a été d'un peu

Je crois devoir faire remarquer que dans l'appréciation de ce rendement, on n'a pas tenu compte, le considérant, ainsi qu'on le verra plus loin, comme ne résultant pas d'*une installation définitive*, de ce que le tuyau de conduite, posé dans une localité où se faisaient beaucoup d'autres expériences, avait été très-endommagé, ayant non-seulement des fissures, mais ayant été écrasé à plusieurs places, ce qui donnait lieu à des étranglements, etc., je discute en note l'effet utile réel d'au moins 50 pour 100.

Quant au passage du Rapport relatif à la variation des niveaux en amont et au *trop-plein* par conséquent, M. le général Morin m'a autorisé à publier une lettre qu'il m'a fait l'honneur de m'écrire, le 5 février 1859, et dans laquelle il dit : « Vos souvenirs » à l'égard des expériences faites au Conservatoire impérial des Arts et Métiers, en » 1855, sont parfaitement exacts ; le niveau pouvait s'abaisser dans le bassin alimen- » taire de votre machine sans en interrompre le jeu, mais il ne pouvait s'élever au delà » d'une certaine limite sans faire cesser complétement la marche de l'appareil ; cet » inconvénient se serait, sans aucun doute, moins facilement manifesté, si, comme on » devrait le faire dans une installation définitive, la section du bassin alimentaire » avait été plus grande. » Le bassin d'aval était aussi trop petit, il y avait gonflement.

M. Combes a expliqué, dans son Rapport à la Société centrale d'Agriculture, en quoi consiste seulement la ressemblance de cet appareil avec le bélier hydraulique. Depuis cette époque, M. le général Poncelet m'a conseillé de donner à toute cette classe d'appa-

---

plus du quart de celle qui serait descendue au bief d'aval si la machine avait marché le même temps. Pendant que le tuyau est sur son siége, on peut conclure que la quantité d'eau perdue est d'au moins un dixième de celle qui descend au bief d'aval à chaque période. Il serait utile d'apprécier aussi celle qui se perd pendant la levée du tuyau. On trouve qu'elle ne doit pas être bien moindre que la précédente, en supposant les fissures égales et assez régulièrement disposées ; elle dure plus longtemps, sous des pressions variées. Enfin ces considérations, en donnant d'ailleurs une idée de la manière de discuter les résultats, montrent que l'effet utile ne peut pas être inférieur à 50 pour 100 en *eau élevée*, surtout si l'on tenait compte de la manière d'apprécier les effets de variation régulière des niveaux, qui étaient de $0^m,06$ en amont et de $0^m,03$ en aval, cela réduit la chute moyenne (*prise d'abord sans tenir compte du gonflement en aval*) à $0^m,50$ et porte l'élévation à $0^m,90$ en nombres ronds. Je dois dire que lorsqu'on essaya de diminuer considérablement la longueur du tuyau fixe, on diminua beaucoup l'effet utile, même en augmentant la quantité d'eau motrice. Je regrette qu'on ne m'ait pas laissé le temps d'étudier convenablement les effets de cette quantité, surtout avant que la longueur du tuyau fût diminuée, ayant cru dans un des essais avoir trouvé une augmentation essentielle d'effet utile au moyen d'une plus grande quantité d'eau motrice qui augmente d'ailleurs les avantages pratiques de l'appareil. Dans l'expérience précitée, la hauteur de la levée du tuyau mobile était seulement de 7 centimètres ; c'était avec une levée plus grande que j'avais cru trouver l'avantage dont il s'agit en débitant plus d'eau. Mais n'ayant pu vérifier cette expérience, je ne donne pas les chiffres. Dans ces expériences, l'orifice d'aval avait le même diamètre que le tuyau de conduite fixe. Au bassin de Picardie, cette extrémité n'avait que 20 centimètres de diamètre, parce que j'avais employé la tête de machine dont parle le Rapport de M. Combes. Ce n'est pas seulement parce qu'il est officiel que j'attache de l'importance au résultat provisoire obtenu par le jury au Conservatoire des Arts et Métiers en 1855. Il vient à l'appui des expériences beaucoup plus répétées que j'avais faites à Versailles en 1854. Il est très-important de remarquer que, si ensuite la diminution de longueur du tuyau fixe a diminué l'effet utile, il est bien probable qu'une augmentation de la longueur de ce tuyau aurait augmenté cet effet utile.

reils nouveaux le nom d'*antibéliers hydrauliques*, pour les distinguer des béliers de Montgolfier, qui ne pouvaient fonctionner sans choc brusque, les béliers aspirateurs eux-mêmes n'en étant pas exempts ; chacun de mes appareils diffère d'ailleurs peut-être plus du précédent que le bélier hydraulique de Montgolfier ne diffère de celui de Witehurst, publié dans les Transactions de la Société Royale de Londres, en 1775, date antérieure de plus de vingt ans à l'époque où Montgolfier avoue lui-même, dans son brevet d'invention, qu'il a pensé pour la première fois à cette machine.

Je dois faire observer que mes appareils essayés très en grand peuvent aussi marcher *régulièrement* très en petit : ce qui permet d'utiliser des chutes aujourd'hui perdues, et qui, par leur nombre, ont beaucoup plus d'importance que quelques chutes puissantes sur lesquelles, au premier aperçu, les applications seraient plus remarquées, quoique moins réellement utiles.

C'est surtout la possibilité de supprimer, dans plusieurs de mes appareils, toute espèce de balanciers et de soupapes, qui a permis de les construire même très en petit, d'une manière on ne peut plus *rustique*. Or cela était peut-être plus difficile à réaliser que pour les grandes machines. J'ai réduit l'appareil à n'avoir d'autre pièce mobile qu'un tube oscillant attaché à un flotteur annulaire ne formant qu'une seule pièce avec lui et qui le relève alternativement, lorsque, après le versement de l'eau au sommet, une oscillation en retour est descendue assez bas pour que l'eau qui pressait à l'intérieur un anneau inférieur d'un diamètre moindre que celui du reste de ce tube, permette à celui-ci d'être ainsi relevé pour redescendre ensuite en vertu des phénomènes précités de succion à contre-courant.

J'ai à Versailles un modèle fonctionnant, *très-rustique*, de cette disposition, quoique je sois parvenu à lui donner des dimensions très-petites [*]. Dans le cas où il resterait le moindre doute sur la marche de *jour* et de *nuit* de mes appareils, en apparence les plus délicats, je le tiens à la disposition du Conservatoire des Arts et Métiers ; je préviens seulement, à cause de la difficulté quelconque résultant des ajustages de petites pièces et de la différence qui en résulte dans le rapport des sections, etc., que l'effet utile sera moindre que pour de plus grandes dimensions (ce qui peut provenir d'ailleurs en partie de ce que l'étude n'en est pas complétée), sans descendre au-dessous de celui de plusieurs grandes machines en usage. Les phénomènes des résistances passives dans les petites vitesses suffiraient seules pour expliquer une diminution sensible d'effet utile. Ces phénomènes s'opposent même à ce qu'on donne au tuyau de conduite fixe le rapport de la longueur à la chute motrice qui conviendrait le mieux à l'effet utile pour de plus grandes dimensions. J'avais espéré pouvoir exagérer la longueur du tuyau de conduite fixe ; je me suis aperçu qu'il fallait au contraire la réduire dans ce cas. Or

[*] Le diamètre a pu être réduit jusqu'à moins de $0^{m},05$, et pourrait, je crois, être encore diminué de plus de moitié ; mais, pour qu'on puisse avoir un effet utile convenable, il faut alors qu'on ait à utiliser une chute très-petite. Si la chute était un peu grande, il est facile de prévoir la perte qui résulterait du frottement. Celles que j'ai employées pour ce petit diamètre ne dépassaient pas $0^{m},18$. Le tube mobile a un diamètre de $0^{m},09$, le cylindre fixe a un diamètre de $0^{m},07$.

je ne saurais trop répéter que, dans des limites très-étendues, la longueur du tuyau de conduite fixe est très-importante pour augmenter l'effet utile.

Dans les expériences plus en grand faites jusqu'à ce jour, toutes les fois que j'ai pu augmenter la longueur du tuyau fixe, j'ai augmenté l'effet utile obtenu. Enfin on peut compter, en attendant mieux, que, *pour ces diamètres très-petits*, l'effet utile en *eau élevée* ne sera pas moindre qu'un tiers environ du travail dépensé.

Comme on le verra plus loin, il est important de pouvoir, dans certaines limites, augmenter la levée du tuyau mobile pour diminuer la perte de force vive à la sortie de l'eau. J'étudie en ce moment les moyens d'employer à cet effet la vitesse acquise du tuyau mobile.

Quand il y a un balancier, je forme le contre-poids, par exemple, d'une chaîne analogue à celle du pont-levis de M. le général Poncelet. Il en résulte que le tuyau mobile peut se lever plus haut, et qu'au commencement de sa descente une succion moins forte suffit; et comme la force de succion augmente à mesure que ce tuyau s'approche de son siége fixe, cette disposition semble très-rationnelle. J'ai obtenu un effet semblable en suspendant un flotteur pouvant plonger en tout ou en partie à l'époque convenable. Enfin si l'on emploie un flotteur au lieu d'un balancier comme ci-dessus, on peut aussi profiter de la vitesse acquise du tuyau mobile. Dans l'un et l'autre cas, il y a lieu d'examiner si, en compliquant un peu l'appareil, on n'augmentera pas l'effet utile au moyen d'un encliquetage qu'il suffira de faire lâcher aux époques où cela sera utile, quand on voudra que le tuyau retombe. Mais cela sera un peu moins simple que l'appareil tel que je l'ai d'abord exécuté, et dans beaucoup de cas, pour les besoins de l'agriculture, etc., il s'agira bien moins d'augmenter l'effet utile que d'avoir un moyen extrêmement simple d'employer de petits cours d'eau perdus. Pour les petites machines, le flotteur est préférable au balancier, qui paraît plus rationnel pour les grandes.

PRINCIPE D'UN RÉGULATEUR DU NIVEAU D'AMONT ET D'UN NOUVEAU BARRAGE MOBILE.

Plusieurs des appareils que j'ai présentés reposent sur divers principes de succion combinés en général de manière à faire fonctionner une pièce mobile, quand la vitesse acquise dans un tuyau fixe atteint une certaine limite. Il en résulte que si le niveau du bief d'amont baisse, ces appareils peuvent en général continuer de marcher, pourvu que la quantité d'eau motrice qui y passe à chaque période puisse varier en sens contraire de la chute, jusqu'à ce que celle-ci soit assez diminuée pour que la vitesse alternative nécessaire à leur jeu ne puisse plus être acquise. Mais quand les biefs d'amont ont peu d'étendue, on conçoit qu'une diminution du cours d'eau motrice obligerait bientôt ces machines de s'arrêter, ainsi que cela arrive d'ailleurs en pareil cas à beaucoup d'appareils connus, qui semblaient au reste devoir conserver sur elles l'avantage spécial de pouvoir continuer à marcher quand le niveau d'amont s'élève, tandis que ces machines nouvelles s'arrêtent en général quand il n'y a pas de trop-plein à une certaine hauteur, parce qu'il y a un mouvement de retour qui ne peut plus se faire dans ce cas sans une régulation d'une espèce particulière (*voir* p. 179 et 195).

J'ai indiqué ci-dessus un moyen de remplacer dans plusieurs de mes appareils les balanciers à contre-poids par des flotteurs plongeant dans l'un ou l'autre bief sans addition de pièce mobile. Abstraction faite de l'avantage qui en est résulté pour diminuer l'inertie du système, ces flotteurs ont une propriété nouvelle provenant de la manière dont ils peuvent être combinés avec la levée de la pièce mobile qui livre passage à l'eau motrice, quand ils sont soulevés en vertu d'une oscillation en retour.

Comme exemple d'application de cette espèce de régulateur, je considérerai seulement ici l'appareil à tube oscillant, qui peut être sans autre pièce mobile, dont j'ai donné la description dans cette Note.

Je suppose que son balancier à contre-poids soit remplacé par un flotteur annulaire, lié au tube mobile et plongeant alternativement dans l'eau du bief supérieur ou dans une capacité en communication avec ce bief. Si le niveau d'amont s'élève, l'oscillation redescend moins bas dans ce tube; mais le flotteur tend à être relevé par l'eau d'amont avec une force qui, dans certaines limites, fait compensation quant au soulèvement.

Si la quantité d'eau motrice diminue un peu, le niveau du bief d'amont tend à descendre; mais, par cette raison même, le flotteur qui soulève alternativement le tube ne peut plus monter aussi haut. Le passage de l'eau motrice est *diminué*, et, en vertu de la nature du phénomène de succion, il n'est plus nécessaire qu'il passe autant d'eau à chaque période pour que le tube mobile retombe sur son siége.

Si au contraire la quantité d'eau motrice augmente, le flotteur se levant plus haut ainsi que le tube auquel il est attaché, il passe d'autant plus d'eau à chaque période que la levée est plus grande. Enfin au delà d'une certaine ouverture la succion ne se faisant plus d'une manière convenable, ce tuyau mobile reste levé. Dans le cas contraire, au delà d'une certaine baisse du niveau d'amont, ce tuyau ne peut plus se lever ou ne se lève que par une succession de vibrations, d'ailleurs assez curieuses, mais ne débitant que très-peu d'eau. Cet appareil peut donc être considéré comme une sorte de *barrage mobile,* permettant à la surface de l'eau d'amont d'osciller entre certaines limites sans qu'il s'arrête. Il peut être disposé de manière que dans des conditions convenables la percussion du moindre filet d'eau le fasse ouvrir en vertu de ces vibrations, de manière à utiliser les moindres quantités d'eau en les employant seulement par intervalles ou, si l'on peut s'exprimer ainsi, *par éclusées.*

Ce qui précède suppose que le bief d'aval ne varie pas bien sensiblement : c'est en effet ce qui arrive en général sur de très-petits cours d'eau utilisés seulement pour les irrigations. Quand le niveau d'aval varie, la question devient moins simple; mais ordinairement quand il s'élève, celui d'amont s'élève aussi et la chute diminue. Dans ce cas, le régulateur peut agir d'après le même principe que ci-dessus. On conçoit d'ailleurs qu'il peut être utile que le flotteur soit divisé en deux, dont un fonctionne dans le bief supérieur et l'autre dans le bief inférieur. Celui du bief inférieur offre l'inconvénient d'exiger un peu plus de profondeur dans les fondations, celui du bief supérieur d'exiger en général la construction d'une capacité annulaire, pour laisser passer le tuyau mobile, soutenue à la hauteur convenable et mise en communication avec le bief d'amont. Je n'entre pas ici dans le détail de la construction du flotteur dans ce cas

et de cette capacité, voulant seulement indiquer un principe applicable d'ailleurs à d'autres systèmes de mon invention [*].

EXPÉRIENCES ET OBSERVATIONS SUR LES NOUVEAUX PHÉNOMÈNES DE SUCCION ET D'ÉCOULEMENT APPLIQUÉS DANS CET APPAREIL. — UTILITÉ DE CES OBSERVATIONS POUR L'EMPLOI DU MOUVEMENT DES VAGUES ET L'EXPLICATION DE PHÉNOMÈNES DIVERS.

MM. Thenard, Clément Desormes et Hachette ont signalé un phénomène de succion qui, dans certaines circonstances exceptionnelles, fait marcher à contre-courant des plaques *beaucoup plus larges* que les orifices des vases devant lesquels elles sont disposées, *les lames liquides étant très-minces*. On sait combien cet ordre de phénomènes a embarrassé les constructeurs, qui étaient loin de se douter qu'on en pourrait tirer parti. Le phénomène de succion dont il s'agit en diffère d'une manière essentielle, comme on le verra plus loin, par divers détails.

Il est juste de rappeler d'abord une expérience de Du Buat, qui a été contestée, l'effet des manomètres pouvant dépendre de la communication latérale du mouvement des liquides. Il avait conclu d'observations faites, au moyen de manomètres, sur les divers points de la face antérieure d'un prisme plongé dans un courant d'eau, qu'il y avait une véritable succion à une certaine distance du pourtour de cette face. Quelle que puisse en être la cause, si l'on obligeait les filets liquides à prendre des directions analogues à celles qu'ils prennent autour de ce prisme, tout en supprimant la partie solide centrale de ce prisme, de manière à ne conserver que l'anneau sur lequel Du Buat prétend avoir observé une succion, cette succion, *si elle était bien réelle*, ce qui paraissait douteux, doit faire avancer cet anneau à contre-courant. C'est ce qui est arrivé lorsque j'ai présenté le tuyau vertical au-dessus du tuyau de conduite fixe, recourbé verticalement, dont l'eau a été obligée

---

[*] Parmi les moyens de régulariser les niveaux je dois en citer un très-simple que j'ai employé avec succès dans mes expériences au bassin de Picardie, à Versailles. L'eau qui arrivait de bas en haut dans une cuve servant de bief d'amont, formait une sorte de jet à mouvements alternatifs très-réguliers, dont la cause dépendait seulement de l'état intérieur des tuyaux de conduite entre les filtres et le bassin. J'ai, dans d'autres circonstances, trouvé moyen de faire osciller des jets d'eau par la seule disposition de pièces fixes à l'orifice de sortie, et je pense que l'étude des phénomènes de ce genre pourra servir plus tard à étudier l'état intérieur des conduites. Mais, dans le cas dont il s'agissait, il fallait avant tout me débarrasser de ces oscillations, si fortes qu'elles mettaient dans l'impossibilité de connaître le niveau moyen de l'eau dans la cuve représentant le bief d'amont. Or, pour faire cesser ces intermittences, il a suffi de poser transversalement une planche au-dessus du jet. C'est-à-dire que la percussion de ce jet contre la planche a suffi pour faire cesser le phénomène d'intermittence dont il s'agissait de me débarrasser, de sorte que l'alimentation du bassin est devenue sensiblement uniforme au moyen de toute l'eau élevée par la machine de Marly. Ainsi dans cette circonstance un obstacle fixe a détruit des intermittences, que dans d'autres circonstances des obstacles fixes avaient occasionnées, ainsi que je l'ai expliqué dans mon second Mémoire de 1850*. J'ai eu depuis occasion d'étudier des ondes formées par la rencontre d'obstacles fixes à l'époque du remplissage du nouveau port de Cherbourg.

* *Voir* tome XV de ce journal. A la page 14 de ce Mémoire, au lieu de $0^m,33$, il faut lire 33 mètres.

de dévier autour du tuyau vertical mobile, en soutenant, dans l'intérieur de celui-ci, une colonne liquide à un niveau plus élevé que le bief inférieur, et dont la *réaction* entretenait la déviation dont il s'agit. Les ondulations du sommet de cette colonne liquide sont entretenues par la percussion graduellement croissante.

Cette *réaction* a de plus un effet positif dans cet appareil, parce que le tuyau vertical mobile porte à sa partie inférieure un anneau d'un diamètre moindre que le sien, mais égal à celui du tuyau fixe. Il y a donc une cause positive de pression qui se joint à la succion pour faire redescendre le tuyau mobile. On peut produire, dans certains cas, une onde annulaire assez curieuse autour de l'extrémité inférieure de ce tuyau, sur le parapluie renversé duquel l'eau baisse alternativement. J'ai même essayé de profiter de ce qu'il en résultait une dénivellation *pendant l'écoulement* de l'intérieur à l'extérieur, et un exhaussement, au contraire, sur le siége quand le tuyau mobile était redescendu. Mais jusqu'à présent j'ai trouvé qu'il était plus prudent, pour la marche continue, d'enfoncer assez profondément le siége fixe pour que cette onde annulaire n'apparaisse plus sensiblement au-dessus du niveau du bief d'aval.

Désirant voir jusqu'à quel point la succion pourrait avoir quelque analogie avec celle dont on doit la connaissance à MM. Thenard, Clément Desormes et Hachette, j'ai prolongé extérieurement, au moyen d'une forte plaque de zinc, le plan horizontal inférieur de l'anneau du tuyau vertical mobile. Mais cela n'a fait que diminuer, au contraire, la force de descente dans ce liquide; cela n'a jamais eu aucun avantage, même quand cette couronne extérieure était très-réduite, de manière, du moins, à ne plus nuire, *il n'y en avait point alors une large autour du tuyau fixe.*

En relevant ensuite les bords extérieurs de cette couronne comme ceux d'un *parapluie renversé*, j'ai considérablement augmenté la force de succion, par suite de la manière dont cette disposition a modifié la déviation des filets liquides (*voir* pour quelques détails numériques le journal *l'Institut*, 1850 et 1851, etc.).

Enfin, j'ai fait passer un plan fixe horizontal par l'orifice du tuyau fixe, disposé précisément au-dessous du tuyau mobile, de manière à former un véritable ajutage annulaire divergent avec le parapluie renversé dont je viens de parler, à l'époque où le tuyau vertical est soulevé. Il est résulté de cette disposition une augmentation considérable dans la force de succion. Il est utile, pour plusieurs raisons, de donner à cette surface fixe inférieure la forme d'une sorte d'entonnoir, dont les bords extérieurs sont d'ailleurs disposés de manière à empêcher le retour des sables, etc.

On conçoit que ces effets dépendent de l'étendue du parapluie renversé et que l'espèce d'ajutage divergent qui en résulte doit d'ailleurs être utile pour ne pas laisser perdre une quantité notable de la force vive restante à l'eau qui s'échappe au bief inférieur, et qui peut être en partie employée à agir par succion sur la colonne liquide, d'après les principes connus des ajutages divergents.

Il est enfin résulté de ces diverses causes réunies une force de succion telle, qu'il a fallu la modérer pour ne pas endommager l'appareil. Or il est à remarquer que le parapluie renversé, utile pour augmenter la succion, est utile aussi, dans certaines limites, pour modérer la percussion du tuyau sur son siége, à cause de la manière dont il est

obligé de déplacer, en descendant, la couche d'eau qui est au-dessous de lui, surtout quand le siége fixe est entouré d'une surface conique, dans laquelle il pénètre comme dans le modèle qui a fonctionné à l'Exposition universelle de 1855.

Quand l'appareil ne marche pas encore, si le tuyau vertical est baissé et le contre-poids convenablement calculé, le moindre ébranlement suffit pour causer des vibrations, à la suite desquelles le tuyau se lève de lui-même lorsqu'il y a assez d'eau en amont, ce qui pourra être utile pour faire partir l'appareil de lui-même dans certaines conditions. Abstraction faite de cette machine, il est intéressant d'étudier les effets du phénomène dont il s'agit relativement à diverses circonstances.

Les Mémoires de la Société Géologique de Londres ont fait mention, il y a environ vingt-cinq ans, d'un phénomène d'hydraulique très-curieux et dont on n'avait point donné d'explication satisfaisante. Dans une des îles Ioniennes, un cours d'eau assez fort se jette dans la terre à un niveau inférieur à celui de la mer. Cet appareil en donne une explication plus complète qu'un autre appareil de mon invention décrit dans le tome VIII, p. 23, de ce Journal.

Les effets de succion ou de pression *négative* des liquides en mouvement sont assez variés pour qu'il ne fût pas étonnant qu'il s'en présentât autour d'une île, si la forme de ses côtes et surtout celle de ses rochers se trouvait dans certaines conditions. Mais pour expliquer des effets aussi remarquables que celui dont il s'agit, il est intéressant de montrer comment on peut utiliser les jets d'eau puissants que les vagues forment souvent sur les rochers et qui n'étaient considérés que comme des moyens de destruction. C'est ce que je me propose de faire, pour montrer d'ailleurs une fois de plus à combien de circonstances variées peuvent être appliqués mes nouveaux principes, dont plusieurs ont autant pour objet la physique générale que la mécanique proprement dite.

J'ai produit des succions à contre-courant très-puissantes, sur une assez grande échelle, au moyen de la percussion des veines liquides, en étudiant l'appareil de mon invention spécialement décrit dans cette Note. Dans les expériences faites à Saint-Lô, la force de succion était encore très-sensible à une distance de 40 centimètres du siége fixe, mais à cette distance elle était très-diminuée, dans certaines circonstances du moins.

Il suffit, pour avoir une idée de ce que je propose aujourd'hui, de supposer toutes les pièces de cet appareil absolument fixes, le tube qui était mobile restant soulevé à une hauteur convenable. Lorsque la surface qui recevait la percussion du liquide était entièrement hors de l'eau du bief inférieur, ainsi que la nappe d'eau qui la frappait en apparence, la succion à *contre-courant* qui en résultait était encore très-puissante et bien plus que suffisante pour faire fonctionner régulièrement l'appareil. Ainsi, dans les bassins de Chaillot, j'ai souvent fait marcher l'appareil pendant plusieurs heures de suite, l'orifice d'aval étant entièrement hors de l'eau. On voyait la nappe liquide sortante *lécher* les parois relevées du parapluie renversé, en formant à ses extrémités une volute annulaire. La puissante force de succion qui se manifestait bien au-dessus de l'eau du bief d'aval venait sans doute de la force centrifuge combinée avec la forme du parapluie renversé, *la nappe d'eau ne suivant plus le plan inférieur de l'ajutage annulaire.*

Dans mes expériences en grand, plusieurs hommes ne pouvaient quelquefois résister, même en agissant à l'extrémité d'un assez long bras de levier; on était enlevé malgré soi avec une extrême violence. J'ai même regretté, dans les circonstances où je me trouvais, de ne pouvoir déterminer convenablement le maximum des poids susceptibles d'être soulevés. Mais je n'aurais pu le faire sans m'exposer à briser les appareils. Cela dépendait beaucoup des diverses hauteurs de levée du tube mobile et du mode de cette levée. Il est d'ailleurs facile de régulariser ces effets quand on les modère.

Il y a lieu de croire que si l'on n'avait pas, au contraire, été obligé de modérer la succion, il aurait été utile de donner une certaine courbure aux surfaces extérieurement relevées, de manière à justifier encore mieux la comparaison de leur forme avec celle d'un parapluie renversé. Quoi qu'il en soit, la forme de cet appareil, comme je l'expliquerai plus au long dans la suite de ce paragraphe, si l'on réduisait son tuyau de conduite fixe à un simple ajutage évasé de manière à recevoir convenablement le choc des flots, toutes les pièces étant d'ailleurs fixes, est assez simple pour qu'on puisse espérer de le trouver dans la nature. On sait que sur certaines côtes, notamment sur celles de la Syrie, on trouve des jets d'eau naturels très-curieux, résultant du mouvement alternatif des vagues. Or il n'y aurait rien d'absolument impossible à ce qu'on trouvât dans la nature quelque chose d'analogue à un appareil de ce genre *à pièces fixes*, les surfaces où se fait la succion pouvant d'ailleurs être en communication avec des cours d'eau souterrains par un siphon ou tuyau naturel.

Mais il ne semble pas même nécessaire d'avoir recours à cette supposition, connaissant les puissants jets d'eau que les vagues occasionnent dans certaines circonstances. Il suffit très-probablement de supposer convenablement relevés ou recourbés extérieurement les bords des surfaces recevant le choc de ces jets d'eau alternatifs, pour qu'il en résulte des effets aussi puissants sur les cours d'eau souterrains que ceux qui ont été signalés par la Société Géologique de Londres, sans explication satisfaisante.

On sait d'ailleurs qu'il existe sur les bords de la Méditerranée des marais qu'on ne peut épuiser, puisqu'on manque de moteurs. Or s'il suffit de présenter au choc des vagues des surfaces convenablement disposées pour obtenir des succions capables de faire ces épuisements; cela est assez simple pour qu'il soit utile de faire à ce sujet les expériences qui pourront être nécessaires à l'étude plus complète de la question, mes expériences à l'époque où je les ai faites ayant eu bien plutôt pour objet l'étude des effets d'une machine hydraulique fonctionnant au moyen d'une chute d'eau régulière.

Dans tous les cas, il est intéressant de se rendre compte des effets de succion, en les étudiant séparément, afin d'arriver à quelque base pour en calculer la puissance. Car, même dans l'appareil ayant les dimensions dont parle surtout le Rapport de M. Combes, il y a des cas où deux hommes ne peuvent résister à la force de succion qui se développe pour les trop petites levées du tuyau mobile; et cependant, au moyen d'un assez petit contre-poids, on a pu disposer les choses de manière à n'avoir aucune percussion apparente, avec de très-petites levées de ce tuyau, lorsque dans les grandes chaleurs, par exemple, on n'a avec le même appareil, versant de l'eau à la même hauteur, qu'une quantité d'eau motrice extrêmement petite. On

conçoit que si le contre-poids ne tient ce tuyau soulevé que par un effort très-faible, l'eau n'a le temps que d'acquérir une très-petite vitesse avant qu'il soit retombé. Si au contraire on fait un certain effort pour le tenir soulevé, bientôt l'eau s'échappe avec une assez grande vitesse pour que la succion devienne plus puissante qu'avec une levée plus grande.

Je crois devoir donner quelques développements à ce que j'ai déjà dit sur les effets de ce genre, les ayant expérimentés *pour des lames très-épaisses*.

On sait que la force centrifuge est un élément essentiel des calculs sur la percussion des liquides, ainsi que cela est expliqué dans l'*Introduction à la mécanique industrielle*, par M. le général Poncelet, et notamment dans son *Essai sur une théorie du choc et de la résistance des fluides indéfinis, principalement fondée sur la considération des forces vives*, §§ 12 et suivants. Il était donc intéressant d'examiner la marche générale des filets liquides dans un canal découvert, dans des circonstances qui, sans être les mêmes que celles de l'appareil décrit ci-dessus, avaient cependant assez de rapports avec le phénomène au moyen duquel je propose de faire des épuisements par la succion des vagues, en utilisant la force centrifuge que leurs puissants jets d'eau alternatifs sur certains rochers permettront sans doute d'appliquer immédiatement, en vertu de quelques modifications dans la forme des surfaces choquées.

On sait d'ailleurs, d'après ce qui se présente au pied d'un phare protégé par des travaux à profil concave, que les flots auxquels ce profil a pour but de résister, s'élèvent en vertu de cette force même à de très-grandes hauteurs; de sorte que des constructions de ce genre permettent d'espérer qu'on pourra disposer de quantités de force vive suffisantes pour faire des épuisements dans de marais tels que ceux de la Camargue, au moyen du système que je propose, et à l'occasion duquel je vais entrer dans quelques détails sur des phénomènes qui peuvent servir à l'étudier.

Un canal rectangulaire versait de l'eau sur un moulin. Pour arrêter ce moulin, il suffisait de disposer transversalement une planche rectangulaire faisant partie dans le premier cas de la paroi latérale.

Or quand on reculait à une assez grande distance en aval la planche transversale dont je viens de parler, si l'aspect général du courant n'était pas beaucoup modifié, les flots d'aval s'infléchissaient davantage, ainsi qu'il était d'ailleurs facile de le prévoir, et il en résultait que leur concavité était tournée de manière que leur force centrifuge s'opposait à la pression du reste du courant sur la paroi du canal en aval de l'orifice.

Cette observation, à laquelle je n'attachai pas d'importance à l'époque où je la fis, parce qu'elle ne me paraissait pas modifier d'une manière essentielle la forme générale du courant et par suite la résistance de l'eau dans les coudes qui me préoccupait alors, offre un des moyens d'expliquer la succion qui se présente dans l'appareil nouveau dont l'étude, *en supposant toutes les pièces fixes*, me conduit à un moyen d'utiliser la force des vagues d'une manière que je crois applicable aux travaux publics.

Dans cet appareil, l'eau arrivant par-dessous dans un tuyau fixe rencontre un tuyau vertical soulevé par un contre-poids ou par un flotteur, en un mot, par une forte résistance qu'il s'agit de vaincre en faisant marcher cette pièce à contre-courant. Or

l'eau qui vient frapper la colonne liquide contenue dans le tuyau soulevé, sort tout autour en suivant des chemins analogues à ce qui se présente à l'aval de l'orifice du canal dont j'ai parlé ci-dessus. Ainsi il n'est pas absolument nécessaire que la partie extérieure de l'anneau attaché à la partie inférieure du tuyau soulevé soit relevée selon certaines lois, pour qu'il se fasse une succion suffisant au jeu de l'appareil. Mais il est facile de comprendre d'après les chemins suivis par les filets liquides, même s'il s'agissait des cas bien plus ordinaires de la percussion des fluides, que l'utilité des bords extérieurs relevés comme un *parapluie renversé* étant constatée par les expériences sur cet appareil, on peut s'en rendre compte jusqu'à un certain point au moyen des effets de la force centrifuge et très-probablement soumettre au calcul la force de succion qui en résulte, même dans les cas où la surface rencontrée s'est trouvée entièrement au-dessus du niveau du bief inférieur, de manière qu'il ne s'agit plus du tout d'un phénomène d'ajutage.

Quant aux applications à la percussion des cours d'eau permanents, et des vagues de la mer, le principe de cet emploi de la force centrifuge paraît pouvoir être utilisé de diverses manières, sans qu'il soit indispensable que le choc ait lieu de bas en haut, dans un appareil d'ailleurs à pièces fixes analogue à celui dont je viens de parler et dont la disposition dépendra de celle des rochers existants. Mais il est intéressant de remarquer, d'après la marche des filets courbes, qu'il sera utile de creuser dans les rochers des excavations suffisantes, pour que l'eau qui viendra les frapper en sorte d'une manière analogue à ce qui se présente dans celui de mes appareils dont il s'agit, pour mieux employer la force centrifuge. L'inertie de l'eau dans les longs canaux souterrains facilite l'emploi d'une succion alternative (Mémoire précité).

Pour me former une idée approchée de la manière dont on devra tailler les rochers quand on en aura à sa disposition, j'ai étudié la forme de la nappe liquide, résultant de ce qu'une veine d'eau sortant horizontalement d'un vase rencontre un tuyau horizontal fixe, recourbé verticalement en aval, de manière à s'élever par son autre extrémité au-dessus du niveau de ce vase. L'eau sortant de ce vase par un tuyau de même diamètre que l'extrémité opposée de celui qui reçoit le choc, ce dernier est d'abord rempli d'eau par la veine qui s'y précipite. Au bout d'un temps très-court, le niveau dans ce tube, quoique soumis à de petites oscillations dans la partie recourbée verticalement, résiste d'une manière assez constante pour que la forme de la nappe liquide divergente paraisse sensiblement permanente, si le niveau ne varie pas dans le vase. Il est même à remarquer, quand celui-ci se vide, que l'angle de la nappe liquide reste sensiblement constant, jusqu'à ce qu'il n'y ait plus que très-peu d'eau dans le vase. Cet angle n'a d'ailleurs été bien observé qu'à droite et à gauche, car on conçoit qu'au-dessus et au-dessous la pesanteur exerce une influence sensible sur l'angle des filets. Cet appareil est conçu d'après celui qui est l'objet principal de cette Note, en supposant toutes les pièces fixes.

Il était essentiel, pour étudier la manière de tailler les rochers, d'examiner ce qui se passerait lorsqu'on boucherait de diverses manières le tube dont il s'agit et qui avait d'abord pour but d'étudier le phénomène relativement à la machine dont je viens

de parler. C'est ce que j'ai fait, sans pouvoir jusqu'à présent remarquer qu'il en résultât une différence bien sensible dans l'angle de divergence des filets liquides. J'en ai conclu qu'il suffirait probablement de tailler les rochers de manière à obliger la veine liquide divergente à faire un angle analogue à celui qui, dans l'appareil dont il s'agit, donne lieu à de si puissants effets de la force centrifuge, pour pouvoir agir par aspiration sur des cours d'eau sous-marins.

On conçoit que les phénomènes de la résistance à la sortie de l'eau du vase dépendent essentiellement de la distance à laquelle la veine liquide rencontre l'obstacle qui la fait dévier; mais je n'ai pas remarqué de différences sensibles dans l'angle de la nappe pour des distances très-différentes de cet obstacle, pourvu que la veine restât suffisamment horizontale entre les deux tuyaux. Afin de mieux m'assurer de cet angle, j'ai fait construire une sorte d'entonnoir renversé, dont on a déterminé par le tâtonnement l'angle ne différant pas sensiblement de celui de la nappe. J'ai trouvé de cette manière que la nappe, après qu'elle s'est bien dégagée de l'obstacle présenté par le bout de tuyau frappé, fait avec l'axe des deux tuyaux horizontaux un angle dont le cosinus est à très-peu près le tiers du rayon, dans les circonstances où j'ai opéré. La veine liquide sortant d'un tuyau d'une longueur de $0^{m},16$ avait 25 millimètres de diamètre, et l'eau du vase qui se vidait s'élevait à 40 centimètres au-dessus de l'orifice quand il était plein. Je ne donne ce résultat que comme un premier aperçu, ayant d'ailleurs reconnu que l'angle dont il s'agit dependait de la vitesse de sortie, pour de fortes pressions motrices comme celles qui donnaient lieu à l'écoulement dans le robinet d'une borne-fontaine pour lequel j'ai observé que les filets liquides déviaient beaucoup moins et formaient un angle d'environ moitié d'un droit avec la direction primitive. Je fais en ce moment même des expériences plus en grand sur ce sujet.

Il sera intéressant de courber extérieurement la surface annulaire destinée à utiliser la succion des vagues; mais ces phénomènes étant très-compliqués et très-peu connus, je me borne pour le moment à proposer l'emploi du choc dont je viens de parler, même sans considérer encore le principe de la communication latérale du mouvement des liquides auquel il faudrait avoir égard à cause de son utilité dans les circonstances dont il s'agit. Il résulte d'ailleurs de mes expériences que, lorsqu'il sera possible de joindre à ces effets ceux qui résultent de l'application du principe des ajutages divergents, comme je l'ai fait dans diverses circonstances, on augmentera notablement la force de succion. Si l'on s'en tient provisoirement à appliquer le plus directement possible la force centrifuge provenant du *choc*, on pourra le faire très en grand sans être absolument obligé de tailler ainsi les rochers sur une grande largeur de chaque côté de l'excavation autour de laquelle la succion se fera; car lorsque la nappe avait quitté l'obstacle qui la faisait diverger, elle conservait assez loin le même angle. Or, quand les filets ne se courbent plus, les mêmes causes de pression négative n'existent plus, d'après les principes discutés dans le travail de M. Poncelet sur la percussion des liquides (*Introduction à la mécanique industrielle*, p. 692). Cependant il doit être utile en général de *modifier la flexion des filets liquides* par la présence d'une surface *recourbée* extérieurement selon certaines lois.

Il est d'ailleurs à remarquer, surtout quant à la machine objet spécial de cette Note, que si le parapluie renversé est extérieurement relevé, les tourbillons qui se présenteront sur la partie recourbée, si elle est plongée, auront une certaine analogie avec ceux qui se présentent à la partie postérieure des corps plongés dans une rivière [*].

EXPÉRIENCES SUR UN GENRE PARTICULIER DE RÉSISTANCE A L'ÉCOULEMENT DE L'EAU.

Je rappelle d'abord que l'eau s'échappe alternativement entre un siége fixe et un tube mobile soulevé dans la forme de l'appareil dont il s'agit principalement ici.

La nappe liquide divergente qui en résulte, et dont j'ai étudié la forme dans diverses expériences, éprouve une résistance d'une espèce particulière à cause de sa déviation par suite de sa rencontre avec ce tube. Cette résistance n'est pas tout à fait du même genre que celle qui se présente dans le coude à angle droit vif, mais avec prolongement fermé en aval pour contenir de l'eau tournoyante, étudié par s'Gravesande. Si l'on conçoit la veine liquide comme composée de couches concentriques, les couches extérieures, celles qui contiennent le plus de masse, ne se comportent pas évidemment comme celles qui sont le plus près du centre. Enfin la nappe liquide extérieure déjà décrite est loin de faire un angle droit avec la direction primitive comme dans les coudes de Venturi et de s'Gravesande, ainsi que je l'ai expliqué en donnant son inclinaison par rapport à l'axe des tubes dans les circonstances que j'ai le plus spécialement étudiées.

Je me suis servi, pour apprécier la résistance à l'écoulement, d'une disposition déjà décrite, la veine liquide coulant horizontalement et rencontrant un tube horizontal, dont une extrémité était relevée verticalement au-dessus du tonneau à une distance de 1 décimètre. L'autre extrémité était approchée successivement à diverses distances du bout du tuyau par lequel sortait la veine liquide pour venir la frapper. Je mesurais le temps que le niveau mettait à baisser dans le tonneau entre deux points de repère dont l'un était à 16 centimètres au-dessus de l'autre, et j'avais ainsi un moyen d'ap-

[*] Voici l'explication admise, plutôt que la démonstration à priori, du phénomène précité, observé par MM. Thenard, Hachette et Clément Desormes. Le fluide coule avec moins de vitesse à l'extrémité annulaire extérieure qu'à la sortie de l'orifice. Or, si l'espace intermédiaire coule plein, cette diminution de vitesse (abstraction faite des pertes de force vive) provient d'une augmentation de pression. Mais, à l'extérieur, la pression est celle de l'atmosphère, donc, à l'intérieur de l'espace compris entre les deux surfaces considérées, la pression sur une certaine étendue peut être moindre. Voilà pourquoi, quand les plaques dont il s'agit sont *assez larges*, elles marchent à contre-courant, malgré la percussion du liquide. Je reconnais qu'il se présente un effet de ce genre dans l'appareil objet de cette Note; mais *quand on supprime la large surface disposée autour du tuyau fixe*, même hors de l'eau du bief d'aval, il se produit encore un effet de succion très-puissant qui ne peut être expliqué par aucune succion d'ajutage et provient d'un effet de la *force centrifuge*. Cela distingue bien le phénomène dont on peut démontrer l'existence à priori; tandis que les effets peu connus des tourbillons et autres causes quelconques de perte de force vive empêchent de calculer la force de succion entre les surfaces planes précitées; la nappe annulaire agit aussi sous la surface relevée extérieurement, au moyen de l'espèce de succion résultant de la communication latérale du mouvement des fluides, notamment sur la masse annulaire du fluide qu'elle enveloppe.

précier la résistance pour chaque distance des deux tubes horizontaux disposés sur le même axe, toutes choses égales d'ailleurs.

J'ai pu constater ainsi dans quelles limites il était important, quant à l'effet utile de l'appareil que ces expériences avaient pour but d'étudier, de se mettre dans les conditions qui permettent de faire alternativement lever le tube mobile à une hauteur convenable par rapport à son diamètre inférieur, et de le tenir levé à son maximum de hauteur pendant la plus grande partie de la durée de son soulèvement. C'est un appareil rustique, susceptible d'être construit en bois par tout charpentier de village, de manière à marcher bien régulièrement; mais il faut, pour obtenir un effet utile convenable, connaître les conditions nécessaires. Ainsi quand son tuyau fixe est trop court, s'il ne marche pas moins bien, on ne peut plus comparer son effet à ceux des bonnes machines en usage. Abstraction faite des autres raisons, le tube mobile ne restant plus assez longtemps soulevé donne alors lieu à des étranglements trop nuisibles.

Je n'entrerai pas ici dans tous les details de l'expérience objet de ce paragraphe; il suffit de dire que la durée de l'écoulement dans l'air entièrement libre étant de cinquante-deux secondes par le tube rectiligne horizontal en zinc précité de $0^m,16$ de long et de 25 millimètres de diamètre intérieur, est ensuite de cinquante-cinq secondes quand on pose à 15 millimètres de distance l'autre tube qui fait diverger la veine. Ainsi pour cette ouverture la résistance a peu d'importance quant à l'effet utile; mais aussi la force de succion qui doit ramener alternativement sur son siége le tube de la machine qu'il s'agit d'étudier, doit être en général bien moindre que pour une levée égale à la moitié du diamètre. Or, pour une distance sensiblement égale à la moitié du diamètre du tube dont il s'agit en ce moment, la durée de l'écoulement n'est encore que de soixante secondes. C'est à une seconde près que ces mesures sont prises, ainsi que les suivantes.

Pour des distances moindres, la durée de l'écoulement finit par croître d'une manière assez rapide. Pour une distance de $0^m,008$, elle est de soixante-six secondes; pour une distance de $0^m,0065$, elle est de soixante-dix secondes; pour une distance de $0^m,005$, elle est de quatre-vingts secondes. Il ne paraît pas très-important, du moins dans plusieurs circonstances, que la levée du tube mobile soit plus grande que les trois dixièmes environ du diamètre du tuyau fixe pour l'appareil objet spécial de cette Note [*].

---

[*] Avant de connaître le phénomène de succion objet de ce paragraphe, j'avais fait des expériences sur l'effet utile, en faisant marcher l'appareil à la main; c'est d'une observation de cette époque que résulte cette indication importante pour l'étude des levées du tuyau mobile que je vais expérimenter très en grand.

Cependant lorsque le tuyau mobile se lève plus que cela n'est indispensable, il se présente un effet intéressant. Ainsi lorsque, dans l'appareil objet du Rapport précité de M. Combes, le tuyau mobile se levait à une hauteur de $0^m,08$ au lieu de $0^m,059$, le contre-poids étant diminué de manière à ne pas changer la durée de chaque période qui élevait un peu plus d'eau, on entendait encore moins le bruit de ce tuyau quand il retombait sur son siége. Mais le jeu de l'appareil était en apparence plus indécis. En résumé, sans paraître encore très-importante, une assez grande levée de ce tuyau mobile est intéressante à étudier, quoiqoe, dans les expériences précitées de Chaillot, j'aie beaucoup varié les levées dont il s'agit sans remarquer des différences bien sensibles dans l'effet utile.

Dans l'expérience dont j'ai donné ci-dessus le procès-verbal, la levée n'était que d'environ le

Pour des distances très-petites, la résistance augmente de plus en plus rapidement, ce qui montre comment les choses se passent pendant les derniers instants de la baisse des tubes mobiles. Mais je n'entrerai pas en ce moment dans ces détails, d'autant plus que les très-petites distances étaient plus difficiles à mesurer rigoureusement dans les circonstances où je me trouvais; je voulais seulement fixer les idées sur la manière dont la perte de force vive, à la sortie de l'eau au bief inférieur, dépend de la levée du tuyau mobile dans l'appareil objet principal de cette Note. Plus la levée du tuyau est grande, plus la perte de force vive résultant de la vitesse de sortie de l'eau en aval est diminuée dans les limites dont je viens de parler, mais aussi plus la force de succion est diminuée elle-même en général; de sorte qu'il faut combiner ces deux éléments pour obtenir le maximum d'effet avec le maximum de simplicité sans augmenter la levée d'une manière inutile dans la pratique [*]. On varie les quantités d'eau débitées en variant cette levée, et le contre-poids ou la densité du flotteur.

EXPÉRIENCES SUR UN MOYEN NOUVEAU DE DIMINUER LA RÉSISTANCE DANS LES COUDES.

Il est à remarquer qu'on avait bien pensé à diminuer la résistance à la flexion brusque des filets liquides au moyen d'une surface conique disposée au centre des conducteurs des turbines; mais, quant à la multiplicité des lames servant de conducteurs dans les mêmes turbines, rien n'indique qu'on ait eu une autre idée que celle de *conduire* tout simplement l'eau motrice d'une manière convenable. Personne, en effet, n'avait pensé à la combinaison dont je vais parler, tandis qu'on avait depuis longtemps pensé à ce cône central, qui a bien moins d'importance, comme on le verra plus loin.

L'expérience suivante est facile à répéter dans les cabinets de physique. Un tuyau vertical cylindrique en zinc, de 50 centimètres de long et de 5 centimètres de diamètre, se termine à son extrémité inférieure par une partie à section quadrangulaire ayant aussi 5 centimètres de diamètre inférieur. Cette section est un carré.

L'extrémité inférieure se termine par un coude de même section à angle droit et en quart de cercle dont le rayon extérieur est de 5 centimètres. Le rayon intérieur de ce coude est nul, c'est-à-dire que chacune des faces planes du coude est un quart de cercle.

---

cinquième du diamètre du tuyau, sans qu'on se soit aperçu que cela diminuât bien sensiblement l'effet utile. Or comme l'appareil marchait aussi régulièrement quand la levée était à peu près égale à la moitié de ce diamètre, c'est une raison de plus pour établir que la quantité d'eau débitée n'était pas suffisante pour obtenir le meilleur effet utile dans les conditions données. Car il est clair que la petite levée dont il s'agit devait donner lieu à une perte notable de force vive, et qu'abstraction faite de raisons données ci-dessus, avec une plus grande quantité d'eau motrice *on aurait pu faire rester le tuyau plus longtemps levé à la hauteur maximum*, d'après des expériences précitées de 1834.

[*] Dans le calcul du frottement pendant l'écoulement de l'eau en aval, il sera prudent de ne pas tenir compte de la diminution des coefficients du frottement dans le mouvement variable, parce que, dans ce cas, si ces coefficients étaient les mêmes que dans le mouvement permanent, le travail résistant en frottement serait presque double en général de ce qu'il serait si le mouvement était permanent.

Trois lames concentriques, perpendiculaires à ces deux faces planes, divisent en quatre parties égales le rayon de courbure de la surface extérieure qui achève de former le coude. Ces lames sont fixes, mais on peut les ôter ou les remettre à volonté pour varier les expériences, parce qu'elles sont attachées à chacune de leurs extrémités au moyen de petites lèvres en zinc, disposées de manière à gêner le moins possible le mouvement de l'eau.

Après avoir plongé dans un réservoir le coude, qui doit toujours être plein d'eau, on bouche le sommet du tube vertical avec la main, la partie inférieure de l'appareil étant toujours ouverte. On commence par déterminer la profondeur à laquelle on doit enfoncer cette dernière partie, pour que l'eau qui, en vertu des lois de l'oscillation, s'élèvera au-dessus du niveau du réservoir quand on en ôtera la main, l'appareil étant en repos, arrive au sommet du tube sans en sortir. On ôte ensuite successivement les lames concentriques disposées dans le coude, et l'on s'assure, en recommençant chaque fois l'expérience de la même manière, que leur suppression diminue notablement cette hauteur. La plus importante paraît être celle du milieu. Il est maintenant probable que plus on pourra les multiplier, plus on diminuera la résistance, jusqu'à la limite où l'on aurait à s'occuper du rétrécissement résultant de leur épaisseur ou du frottement résultant de leur nombre; de sorte que c'est surtout pour les tuyaux d'un grand diamètre que ce système de courbes concentriques sera utile.

Toutes ces lames étant ôtées, j'ai remplacé le fond arrondi du coude par un fond à angle droit vif, et j'ai constaté que cet arrondissement avait beaucoup moins d'influence que les trois lames. Enfin j'ai répété les premières expériences sur un coude dont le rayon intérieur était égal au diamètre du tuyau.

Dans ce cas, la résistance au coude étant petite par rapport aux autres genres de résistance, telles que la contraction de la veine liquide, les observations devenaient moins concluantes. Mais on a pu constater qu'un coude brusque à angle droit, comme celui sur lequel j'avais d'abord opéré, pouvait, au moyen des lames concentriques, ne pas faire éprouver beaucoup plus de résistance qu'un coude aussi arrondi que celui dont on vient de parler.

J'ai constaté par des expériences en grand que ces lames courbes n'empêchaient pas, étant disposées dans un coude sous le tuyau mobile, l'effet de la succion de se produire, de manière à faire fonctionner régulièrement l'appareil objet principal de cette Note. Pour le cas où le tuyau de conduite fixe a 1 mètre de diamètre intérieur et cinq lames courbes concentriques, je suis parvenu ainsi à rendre le jet de sortie si régulier, que la vitesse de l'eau tout à fait en aval n'est pas sensiblement plus grande que celle de l'eau qui sort de chaque côté de l'axe.

Ainsi que le rappelle le Rapport de M. Combes, je ne me propose de rendre mobile tout le tuyau vertical que pour les cas où ce tuyau n'a qu'une hauteur médiocre. Dans le cas contraire, ce tuyau est fixe, et la seule partie mobile est une soupape de Cornwall ou une vanne cylindrique. Cette vanne était même déjà indiquée dans mon Mémoire sur les oscillations de l'eau dans les tuyaux de conduite, présenté à l'Académie des Sciences en 1837, et pour lequel cette Académie m'a fait l'honneur de me décerner le prix de Mécanique le 30 décembre 1839; mais je ne connaissais pas alors les phénomènes nou-

veaux objet spécial de cette Note, qui simplifient singulièrement plusieurs des systèmes de ce genre et en font des appareils réellement très-différents des premiers que j'avais présentés. Je vais donner une idée des applications de ce genre de machines à des objets très-différents de l'élévation de l'eau.

FORME PARTICULIÈRE DES MACHINES A COMPRIMER DE L'AIR AU MOYEN DES CHUTES D'EAU, PROPOSÉES POUR LE VERSANT FRANÇAIS DU MONT CENIS.

Il est à remarquer que mes divers systèmes ne peuvent marcher sans souffler de l'air. En 1844, relativement à celui auquel je donnais le nom de *bélier univalve* avant que M. le général Poncelet m'eût conseillé de donner à toute cette classe de machines le nom d'*antibéliers*, j'ai communiqué à la Société Philomathique de Paris un moyen de transformer les appareils de ce genre en machines soufflantes ou à compression d'air. J'avais déjà remarqué dans les *Annales des Mines*, année 1838, t. XIV, p. 21, comment la grandeur d'une colonne d'air peut supprimer tout choc brusque pendant que la compression se fait. Je disais « que la pression augmenterait graduellement dans ce matelas » d'air et produirait peut-être à peu près le même effet sur la colonne qu'une *augmenta-* » *tion graduelle de la pesanteur....* » Or il est à remarquer que, précisément dans le bélier *univalve* et dans mes autres appareils élévatoires, le chemin parcouru alternativement par la colonne liquide *étant bien autrement grand que dans le bélier de Montgolfier*, cela seul changerait déjà l'état de la question, quant au mode de compression de l'air par les machines de ce genre. Je reviendrai plus loin sur ce qu'avait dit Montgolfier [*].

---

[*] Voici un extrait des procès-verbaux des séances de la Société Philomathique de Paris, séance du 22 juin 1844, publié par le journal *l'Institut* du 3 juillet 1844, n° 549, p. 228, et reproduit par l'Académie royale des Sciences de Turin dans le compte rendu de sa séance du 2 janvier 1859, publié dans la *Gazette piémontaise*, qui était alors le journal officiel du royaume de Sardaigne, n° du 24 janvier 1859. Le moyen suivant est évidemment applicable absolument de la même manière à mes divers systèmes de colonnes oscillantes élévatoires publiés avant 1844.

« M. de Caligny communique à la Société un moyen de transformer en machine soufflante un » des appareils à élever l'eau, qu'il a présentés en 1837.

» Le bélier hydraulique de Montgolfier, introduisant périodiquement dans un réservoir d'air de » l'eau qui ne revient point sur ses pas, ne peut pas être considéré comme une machine soufflante de » la même manière que le bélier univalve de M. de Caligny, dans lequel le tuyau d'ascension se vide » périodiquement par un retour vers la source, quand l'eau élevée s'est dégagée par son sommet. Il est » clair que, dans ce dernier système, un volume d'air égal à celui du chemin abandonné alternativement par cette colonne est périodiquement chassé par son sommet. On peut donc, en disposant » vers ce sommet des soupapes qui permettront à l'air extérieur de rentrer pendant le retour de la » colonne liquide, employer le travail de la machine à comprimer de l'air dans un réservoir latéral, au lieu de l'employer à verser périodiquement de l'eau au-dessus du niveau de la source. Pour » de grandes dimensions, la soupape du bélier univalve est, si on se le rappelle, remplacée par une » soupape cylindrique à double siége, dite *de Cornwall*, qui, en s'ouvrant alternativement, permet à » la force vive de s'emmagasiner dans le corps de bélier, tout étant d'ailleurs disposé de manière » qu'il n'y ait pas de percussion *brusque* dans le système. Cette machine soufflante ou à compression » d'air serait immédiatement applicable à divers appareils à air comprimé, si leur utilité pratique » était suffisamment établie. » (*Voir* ce que M. de Cuyper en a dit dans sa *Revue universelle*, 1859.)

On peut appliquer à cette circonstance le nouveau phénomène de succion décrit ci-dessus, ainsi que je l'ai d'ailleurs annoncé sommairement à la Société Philomathique le 2 novembre 1850, comme on peut le voir dans le journal l'*Institut* du 20 novembre 1850, nº 881, p. 373, où l'on dit : « *Il n'est pas nécessaire que le tuyau vertical soit en entier* » *mobile. On peut ne rendre mobile qu'une soupape de Cornwall. Alors cet appareil peut* » *être employé à comprimer de l'air au moyen d'un piston liquide....* »

Dans le cas où les chutes d'eau motrices ne sont pas grandes, il est plus rationnel d'employer le mouvement acquis par un écoulement préalable à l'extérieur que de faire d'abord, comme au mont Cenis, sur le versant français à Modane, élever l'eau par des pompes pour se procurer une chute de 26 mètres, afin de laisser ensuite la force vive se développer dans une colonne liquide partant du repos, pour employer le principe d'un autre appareil de mon invention en qui l'on avait plus de confiance. La chute de $6^{m},50$, qui est du côté de Modane, aurait bien suffi pour comprimer directement l'air à 5 ou 6 atmosphères, sans avoir recours à l'élévation préalable qui a été faite dans cette localité, et que je n'aurais pas conseillée si j'avais été consulté sur cette application de mes idées par le gouvernement de Turin, qui m'avait fait l'honneur de me décerner une grande médaille d'or, le 31 juillet 1844, *pour tous mes écrits sur l'hydraulique*, selon deux lettres de M. Solar de la Marguerite, alors Ministre des Affaires étrangères du feu roi Charles-Albert. J'étais déjà membre correspondant de l'Académie des Sciences de Turin avant de recevoir cette médaille.

Il y aurait eu, il est vrai, un inconvénient à l'application directe de cette chute de $6^{m},50$, consistant en ce qu'il aurait fallu des tuyaux de conduite fixes d'une plus grande longueur sans être aussi longs que ci-dessus (*voir* pour tous les cas analogues le t. XII de ce *Journal*, p. 88) et probablement d'un plus grand diamètre ou en plus grand nombre. Mais en supposant même que cela eût augmenté la dépense de premier établissement, il aurait sans doute été utile de ménager le travail disponible, si, comme le dit M. Eugène Flachat dans son ouvrage sur la traversée des Alpes par un chemin de fer, on doit craindre de finir par ne pas en avoir assez. Enfin, en supposant même que toutes les choses eussent été égales d'ailleurs, il aurait été plus rationnel en principe, pour un si beau travail, de ne pas créer une chute d'eau au moyen d'une chute moindre, si celle-ci pouvait être utilisée *directement*.

Je ne saurais trop répéter d'ailleurs qu'en supposant qu'il restât le moindre doute sur l'opportunité de l'emploi du nouveau phénomène de succion exposé ci-dessus, rien n'aurait empêché de faire fonctionner la vanne cylindrique ou soupape de Cornwall par des moyens extérieurs connus, en profitant de ce qu'on peut *réduire presque indéfiniment la perte de force vive dans ce genre d'appareils*, sauf à sacrifier un peu de leur simplicité, dans des limites où cela n'a pas tant d'importance pour les grandes machines que pour les petites, surtout quand celles-ci sont construites d'une manière rustique, ce qui n'était point le cas, rien n'ayant été épargné dans les belles constructions dont il s'agit.

Montgolfier savait qu'on pouvait se servir du bélier hydraulique pour comprimer de l'air. C'est moi-même qui ai rappelé, à ce sujet, à l'Académie des Sciences de Turin, un passage oublié du *Journal de l'École Polytechnique*, année 1808, p. 297 ; mais je suis

le premier qui ai montré comment on pouvait comprimer de l'air au moyen du mouvement acquis de grandes colonnes liquides *en supprimant les chocs brusques*, et qui ai signalé, dans ce but, l'application des vannes cylindriques ou soupapes de Cornwall au moyen desquelles l'état de la question est complétement changé. Enfin, personne avant moi n'avait montré de grandes colonnes liquides en mouvement fonctionnant dans des enveloppes fragiles sans les endommager [*].

Les remarques précédentes sur le système qu'il eût été, selon moi, le plus convenable d'étudier pour le versant français, ne s'appliquent pas au versant italien, où l'on a une chute motrice de 26 mètres et où l'on a fait un choix judicieux parmi mes systèmes de machines à comprimer de l'air; j'aurai cependant quelques observations critiques à faire. Mais les résultats obtenus paraissent assez beaux pour être considérés comme une confirmation importante de mes idées, dont quelques détails seulement auraient pu être mieux compris, selon moi. Désirant qu'on ne confonde pas ce qu'il y a de plus essentiel dans les deux systèmes principaux de machines à comprimer de l'air dont je suis l'auteur, je me borne pour le moment à ce qui précède, réservant pour une autre Note ce qu'il me reste à dire sur ce grand travail.

PRINCIPE DE NOUVELLES MACHINES SOUFFLANTES.

Rien n'indique que Montgolfier ait eu la moindre idée d'appliquer le bélier hydraulique à souffler de l'air, en un mot, à comprimer de l'air à des tensions *très-faibles*, comparativement à la pression qui serait due à une colonne d'eau en repos d'une hauteur analogue à celle d'une chute motrice. Le 9 décembre 1844, j'ai présenté à l'Académie des Sciences un Mémoire dans lequel j'ai particulièrement développé les considérations sur lesquelles repose cette nouvelle application de mes principes. Après ce qui précède, il suffit de montrer qu'à la limite, quand mes divers appareils élévatoires sont considérés comme n'ayant pour but que d'élever de l'eau sans intermédiaire, *ils soufflent* alternativement de l'air sous une pression insignifiante; mais que si l'on veut les employer à comprimer de l'air, on peut opérer cette compression à un degré aussi faible qu'on le veut, puisque moins la tension de l'air est forte, plus la colonne liquide parcourt de chemin dans la chambre de compression substituée au tuyau d'ascension de l'une quelconque de mes machines à élever de l'eau à colonnes liquides oscillantes. Or quand la force vive ascensionnelle de l'eau est éteinte, le travail disponible restant dans

[*] C'est en laissant la force vive se développer dans une colonne liquide partant du repos et en vidant ensuite la chambre de compression par une oscillation descendante au-dessous du niveau d'aval, comme dans celui de mes appareils qui a été l'objet d'un Rapport favorable à l'Institut le 20 août 1838, que l'on comprime l'air au mont Cenis. Dans le cas où il resterait le moindre doute sur la généralité du moyen précité que j'ai proposé en 1844 pour transformer mes appareils en machines à comprimer de l'air, il suffirait, ainsi que je l'ai expliqué dans un Mémoire que l'Académie des Sciences de Turin m'a fait l'honneur de publier dans son volume pour 1859, de rappeler ce que j'ai dit sur ce sujet à la Société Philomathique de Paris, le 8 août 1846, d'après l'extrait publié par le journal *l'Institut* du 26 août 1846, n° 660, p. 288, qui renvoie à un autre article du journal *l'Institut*, du 8 août 1839, n° 293, p. 271. Je reviendrai sur ce sujet dans une autre Note, où je signalerai des simplifications à celui de mes systèmes qui est appliqué au mont Cenis.

cette colonne liquide peut être employé à produire l'oscillation descendante dont on a besoin pour le jeu de la machine; soit que cette colonne se suffise à elle-même pour cette oscillation, soit que, son ascension ayant été plus ou moins limitée par l'air qu'elle a comprimé, il reste sur la tête de cette colonne une quantité quelconque d'air comprimé qui agit en temps utile sur elle par sa détente.

CONCLUSIONS.

C'est surtout l'extrême simplicité qui distingue, comme machine d'agriculture, l'appareil présenté sous la forme qui est l'objet le plus spécial de cette Note. Cependant l'effet utile de mon moteur hydraulique à flotteur oscillant dépassant notablement 60 pour 100, il est bien probable que l'effet utile, pour la forme dont il s'agit, différera peu de ce chiffre, quand on aura eu occasion de l'étudier sur des cours d'eau assez différents. Les moyens de varier le débit n'ont pas été suffisamment mis à ma disposition, comme il l'avaient été pour le flotteur oscillant, je ne suis donc pas assez sûr de quelques résultats partiels, qui n'ont pas été répétés, pour pouvoir l'affirmer, et je ne crois qu'aux expériences suffisamment répétées dans des circonstances identiques.

Mais un effet utile constaté de 50 pour 100, *en eau élevée,* est déjà une chose essentielle, surtout à cause de la *rusticité* du système. J'ai montré comment on devait discuter les résultats obtenus, renvoyant, quant à diverses théories, à mes précédents Mémoires.

Ainsi il est évident que si, au lieu d'être élévatoire, l'appareil est employé à relever alternativement un flotteur pour en faire un moteur hydraulique, les vitesses de l'eau et le chemin des résistances passives seront diminués, et qu'il en sera ainsi, à plus forte raison, si l'appareil est employé, non à relever un flotteur, mais à comprimer de l'air à des tensions assez fortes dans les limites où il pourra le faire sans secousses [*].

Les phénomènes nouveaux de succion à contre-courant, étudiés à l'occasion de cette machine, seront susceptibles de diverses applications aux travaux publics et à la physique. Je signale surtout l'effet résultant de ce qu'on rend fixes toutes les pièces de l'appareil élévatoire, parce que les causes du phénomène de succion, subsistant malgré cela, peuvent servir à en faire un appareil d'épuisement, sans aucune pièce quelconque mobile. On peut ainsi utiliser la force des courants, et des vagues pour faire des épuisements, par exemple dans les marais de la Camargue, ou dans d'autres endroits où l'on pourrait, même sans machine proprement dite, tailler convenablement des rochers, de manière à expliquer d'ailleurs des phénomènes qui embarrassent encore les géologues.

---

[*] A la Chambre des Députés de Turin une Commission ayant rappelé avec bienveillance mon Mémoire de 1837 et la médaille d'or précitée du roi Charles-Albert, M. Sella, un des ministres, a dit en italien à cette Chambre « ... Le premier peut-être qui proposa d'employer l'air comprimé à per- » cer les grandes chaînes de montagnes fut Colladon de Genève. Caligny avait proposé des appareils à » employer l'eau à comprimer cet air, en tirant parti de la force vive de cette eau, quand elle aurait » été mise en mouvement.... » M. Macchi, un des membres de la Commission a dit ensuite : « ...Io » trovo giusto doversi profittare di quest' occasione per rendere al marchese di Caligny ampia testi- » monianza di onore per quel tanto che egli ha fatto in proposito, e gliela rendo di gran cuore, per- » suaso che, nobilmente operando, null' altro s' attende da noi quel dotto e nobile signore... »

SUR LA FORME
$x^2 + y^2 + 8z^2 + 16t^2$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

Étant donné un entier n pair ou impair (que nous représenterons par $2^\alpha m$, m étant impair et l'exposant α pouvant se réduire à zéro), on demande le nombre N des représentations de n par la forme

$$x^2 + y^2 + 8z^2 + 16t^2,$$

c'est-à-dire le nombre N des solutions de l'équation indéterminée

$$n = x^2 + y^2 + 8z^2 + 16t^2,$$

où x, y, z, t sont des entiers indifféremment positifs, nuls ou négatifs. La valeur de N dépend, comme on va le voir, de la fonction $\omega_1(m)$ définie, au moyen des diviseurs conjugués d, δ de l'entier impair $m = d\delta$, par l'équation

$$\omega_1(m) = \sum (-1)^{\frac{\delta^2 - 1}{8}} d,$$

et aussi de la somme

$$\sum (-1)^{\frac{r-1}{2}} r$$

relative aux entiers positifs r qui peuvent figurer dans l'équation

$$m = r^2 + 2u^2,$$

où l'entier u, quand il n'est pas zéro, doit être pris positivement comme négativement.

Soit d'abord n impair, $n = m$. Il est évident que l'on a $N = 0$ si m est de la forme $4l + 3$. Il n'en est plus de même quand m est de la forme $4l + 1$. Je trouve, en effet,

$$N = 2\left[\omega_1(m) + \sum (-1)^{\frac{r-1}{2}} r\right]$$

si $m = 8k + 1$, et

$$N = 2\omega_1(m)$$

si $m = 8k - 3$.

Prenons d'abord des entiers $8k + 1$, et faisons $m = 1 = 1^2 + 2.0^2$; notre formule donne $N = 4$, ce qui est confirmé par les équations

$$1 = (\pm 1)^2 + 0^2 + 8.0^2 + 16.0^2,$$
$$1 = 0^2 + (\pm 1)^2 + 8.0^2 + 16.0^2,$$

puisqu'elles fournissent pour l'entier 1 quatre représentations.

Pour $m = 9$, comme on a

$$9 = 3^2 + 2.0^2, \quad 9 = 1^2 + 2(\pm 2)^2,$$

il vient

$$N = 2(7 - 3 + 2) = 12.$$

Les équations

$$9 = (\pm 3)^2 + 0^2 + 8.0^2 + 16.0^2,$$
$$9 = 0^2 + (\pm 3)^2 + 8.0^2 + 16.0^2,$$
$$9 = (\pm 1)^2 + 0^2 + 8(\pm 1)^2 + 16.0^2,$$
$$9 = 0^2 + (\pm 1)^2 + 8(\pm 1)^2 + 16.0^2,$$

donnent en effet pour l'entier 9 douze représentations.

Soit enfin $m = 17 = 3^2 + 2(\pm 2)^2$. Il nous viendra

$$N = 2(18 - 6) = 24;$$

et cette valeur est aisée à vérifier au moyen des équations

$$17 = 1^2 + 4^2 + 8.0^2 + 16.0^2,$$
$$17 = 3^2 + 0^2 + 8.1^2 + 16.0^2,$$
$$17 = 1^2 + 0^2 + 8.0^2 + 16.1^2,$$

en y affectant du double signe $\pm$ les racines des carrés qui ne sont pas nuls et en opérant les permutations convenables.

Passons aux entiers $8k-3$, en faisant $m=5$. Notre formule pour ce cas donne $N = 2\omega_1(5) = 8$: cela est vérifié par les équations

$$5 = (\pm 1)^2 + (\pm 2)^2 + 8.0^2 + 16.0^2,$$
$$5 = (\pm 2)^2 + (\pm 1)^2 + 8.0^2 + 16.0^2.$$

Pour $m = 13$, il vient

$$N = 2\omega_1(13) = 24.$$

Les équations

$$13 = (\pm 1)^2 + (\pm 2)^2 + 8(\pm 1)^2 + 16.0^2,$$
$$13 = (\pm 2)^2 + (\pm 1)^2 + 8(\pm 1)^2 + 16.0^2,$$
$$13 = (\pm 2)^2 + (\pm 3)^2 + 8.0^2 + 16.0^2,$$
$$13 = (\pm 3)^2 + (\pm 2)^2 + 8.0^2 + 16.0^2,$$

confirment ce fait.

Actuellement supposons n pair, $n = 2^\alpha m$, $\alpha > 0$. L'équation

$$2^\alpha m = x^2 + y^2 + 8z^2 + 16t^2$$

se ramènera alors à celle-ci :

$$2^{\alpha-1} m = x^2 + y^2 + 4z^2 + 8t^2,$$

sans que le nombre des solutions soit changé. Or cette dernière équation a été discutée dans le cahier de mars. De là résultent pour le nombre N des représentations d'un entier pair n par la forme actuelle

$$x^2 + y^2 + 8z^2 + 16t^2$$

les conséquences suivantes.

Pour n impairement pair, $n = 2m$, on a évidemment $N = 0$ si

$m = 4l + 3$. Mais

$$N = 4\omega_1(m)$$

si $m = 4l + 1$.

Pour n divisible par 4, non par 8, $n = 4m$, on a

$$N = 4\omega_1(m),$$

quelle que soit la forme linéaire de m.

Enfin pour n divisible par 8, quel que soit le quotient, c'est-à-dire pour $n = 2^\alpha m$, $\alpha > 2$, on a

$$N = 2(2^{\alpha-1} - 1)\,\omega_1(m)$$

si $m = 8k \pm 1$, mais

$$N = 2(2^{\alpha-1} + 1)\,\omega_1(m)$$

si $m = 8k \pm 3$.

SUR LA FORME
$x^2+y^2+2z^2+16t^2$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

On demande le nombre N des représentations d'un entier donné n (ou $2^\alpha m$, m impair, $\alpha = 0, 1, 2, ..$) par la forme

$$x^2+y^2+2z^2+16t^2;$$

et cette fois encore nous aurons besoin, tant de la fonction $\omega_1(m)$ définie par les équations

$$m = d\delta, \quad \omega_1(m) = \sum(-1)^{\frac{\delta^2-1}{8}} d,$$

que de la somme

$$\sum(-1)^{\frac{r-1}{2}} r$$

qui se rapporte aux entiers positifs r figurant dans l'équation

$$m = r^2 + 2u^2,$$

où l'entier u est indifféremment positif, nul ou négatif.

Soit d'abord n impair, $n = m$. On aura

$$\text{N} = 2\left[\omega_1(m) + \sum(-1)^{\frac{r-1}{2}} r\right].$$

Cette formule est générale; mais pour les entiers m de l'une des deux

formes $8k - 3$, $8k - 1$, elle se simplifie d'elle-même et se réduit à

$$N = 2\omega_1(m),$$

attendu que l'équation $m = r^2 + 2u^2$ est alors impossible.

Prenons d'abord $m = 1 = 1^2 + 2.0^2$. Notre formule donnera $N = 4$; et cela s'accorde avec les équations

$$1 = (\pm 1)^2 + 0^2 + 2.0^2 + 16.0^2,$$
$$1 = 0^2 + (\pm 1)^2 + 2.0^2 + 16.0^2,$$

qui donnent pour l'entier 1 quatre représentations.

Soit ensuite $m = 3 = 1^2 + 2(\pm 1)^2$. Il nous viendra

$$N = 2(2 + 2) = 8.$$

Les équations

$$3 = (\pm 1)^2 + 0^2 + 2(\pm 1)^2 + 16.0^2,$$
$$3 = 0^2 + (\pm 1)^2 + 2(\pm 1)^2 + 16.0^2,$$

confirment ce fait.

Faisons à présent $m = 5$. Nous aurons

$$N = 2\omega_1(5) = 8.$$

Cela s'accorde avec les équations

$$5 = (\pm 1)^2 + (\pm 2)^2 + 2.0^2 + 16.0^2,$$
$$5 = (\pm 2)^2 + (\pm 1)^2 + 2.0^2 + 16.0^2.$$

Soit encore $m = 7$. Il nous viendra

$$N = 2\omega_1(7) = 16.$$

Or les équations

$$7 = (\pm 1)^2 + (\pm 2)^2 + 2(\pm 1)^2 + 16.0^2,$$
$$7 = (\pm 2)^2 + (\pm 1)^2 + 2(\pm 1)^2 + 16.0^2,$$

fournissent bien pour l'entier 7 seize représentations.

Pour $m = 9$, comme on a

$$9 = 3^2 + 2.0^2$$

et

$$9 = 1^2 + 2(\pm 2)^2,$$

la valeur de N sera

$$N = 2(7 - 3 + 2) = 12.$$

Cela est confirmé par les équations

$$9 = (\pm 3)^2 + 0^2 + 2.0^2 + 16.0^2,$$
$$9 = 0^2 + (\pm 3)^2 + 2.0^2 + 16.0^2,$$
$$9 = (\pm 1)^2 + 0^2 + 2(\pm 2)^2 + 16.0^2,$$
$$9 = 0^2 + (\pm 1)^2 + 2(\pm 2)^2 + 16.0^2,$$

qui donnent pour l'entier 9 douze représentations.

Pour

$$m = 11, \quad m = 13, \quad m = 15, \quad m = 17, \ldots,$$

notre formule donne respectivement

$$N = 8, \quad N = 24, \quad N = 16, \quad N = 24, \ldots;$$

mais je m'arrête dans ces exercices numériques.

Maintenant supposons n pair, $n = 2^\alpha m$, $\alpha > 0$. L'équation

$$2^\alpha m = x^2 + y^2 + 2z^2 + 16t^2$$

se ramènera alors à celle-ci :

$$2^{\alpha - 1} m = X^2 + Y^2 + Z^2 + 8T^2,$$

sans que le nombre des solutions soit changé. Mais cette dernière équation s'est déjà présentée à nous (cahier de septembre 1861). D'après cela, on arrive aisément, pour le nombre N des représentations

d'un entier pair n, par la forme actuelle

$$x^2 + y^2 + 2z^2 + 16t^2,$$

aux conclusions suivantes.

Pour n impairement pair, $n = 2m$, on a

$$N = 6\omega_1(m)$$

si m est de l'une des deux formes $8k+1$, $8k-3$; mais

$$N = 4\omega_1(m)$$

si $m = 8k+3$, et

$$N = 0$$

si $m = 8k-1$.

Pour n divisible par 4, non par 8, $n = 4m$, on a

$$N = 12\omega_1(m),$$

quelle que soit la forme linéaire de m.

Enfin pour m divisible par 8, $n = 2^\alpha m$, $\alpha > 2$, on a

$$N = 2(2^{\alpha-1} - 1)\omega_1(m)$$

si $m = 8k \pm 1$, mais

$$N = 2(2^{\alpha-1} + 1)\omega_1(m)$$

si $m = 8k \pm 3$.

SUR

L'APPLICATION DU THÉORÈME DE L'ÉQUIVALENCE DES TRANSFORMATIONS AU TRAVAIL INTÉRIEUR;

PAR M. R. CLAUSIUS [*].

TRADUIT DE L'ALLEMAND PAR M. MARC DUFRAISSE.

Dans un Mémoire imprimé en 1854 [**], qui avait pour objet de donner à mes publications antérieures une forme plus simple, j'ai tiré du principe posé par moi, *que la chaleur ne peut passer d'elle-même d'un corps plus froid dans un corps plus chaud*, un théorème étroitement lié, sans y être absolument conforme, avec celui que S. Carnot avait déjà déduit d'autres considérations, basées sur les idées plus anciennes touchant la nature de la chaleur. Ce théorème a trait aux circonstances dans lesquelles le travail peut se transformer en chaleur et réciproquement la chaleur en travail, et je l'ai nommé le *théorème de l'équivalence des transformations*. Toutefois, à cette époque, je ne communiquai point au public le théorème entier dans la forme générale sous laquelle je l'avais conçu et développé dans mes recherches; je me restreignis dans cette publication à une partie, qui pouvait être traitée séparément et démontrée avec plus de certitude que le surplus du théorème.

Dans tout changement d'état d'un corps, il est fait en général simul-

[*] Lu à la Société des Sciences naturelles de Zurich le 27 janvier 1862, et imprimé dans le *Recueil trimestriel de la Société*, t. VII, p. 48.

[**] Sur une forme nouvelle du second théorème principal de la théorie mécanique de la chaleur. (*Ann. de Pogg.*, s. XCIII, p. 481; *Journ. de Liouville*, t. XX, p. 63; *Phil. Mag.*, s. IV, t. XII, p. 81.)

tanément du travail *extérieur* et du travail *intérieur,* le premier par des forces que des corps étrangers exercent sur le corps dont il s'agit, et le second par des forces que les particules de ce corps lui-même exercent les unes sur les autres. Le travail intérieur est le plus souvent si peu connu, et, de plus, il est lié à une autre quantité pareillement inconnue, de telle façon qu'en le traitant, on doit se laisser diriger, en partie du moins, par des conjectures; pendant que le travail extérieur est accessible à l'observation et à la détermination immédiates et peut être traité plus rigoureusement. Comme, dans ma publication précédente, je désirais éviter tout ce qui serait hypothétique, j'en écartai complétement le travail intérieur, ce qui était possible par cela que je restreignais mes considérations à des *séries circulaires de changements* (*Kreisprocesse*). J'entends par là une succession de changements que le corps éprouve et qui sont ordonnés de telle sorte, qu'il retourne finalement à son état initial [*]. En effet, dans une opération de cette nature, les quantités du travail intérieur qui se fait dans les changements successifs et qui est partie positif, partie négatif, s'entre-détruisent les unes les autres, si bien que leur somme est zéro, et qu'il ne reste plus que du travail extérieur, et, pour ce dernier, le théorème dont il s'agit peut être prouvé avec une rigueur mathématique en vertu du principe rappelé plus haut.

J'ai différé de publier l'autre partie de mon théorème, parce qu'elle conduit à une conséquence qui s'écarte considérablement des idées répandues jusqu'à ce jour touchant la chaleur contenue dans les corps, et que, par cette raison, je désirais la soumettre à un examen plus approfondi. Mais comme dans le cours des années je me suis convaincu de plus en plus qu'il ne faut pas donner trop d'importance à ces idées qui en partie s'appuient plutôt sur l'habitude que sur des bases scientifiques, je crois devoir ne plus hésiter, et je donne le théorème complet de l'équivalence des transformations avec les théorèmes qui y sont connexes. J'espère que l'importance que ces théorèmes, s'ils sont exacts,

---

[*] On rend par ces mots : *série circulaire de changements*, l'idée exprimée dans la traduction du Mémoire de 1854 par les termes : *mode d'opérations d'un tour entier.*

MARC DUFRAISSE.

ont pour la théorie de la chaleur, en justifiera la publication dans la forme hypothétique sous laquelle je les présente.

Mais je dois faire remarquer en même temps que si l'on hésitait à reconnaître la justesse des théorèmes suivants, la valeur des conclusions contenues dans mon précédent Mémoire, lesquelles ont trait à des séries circulaires de changements, ne serait nullement infirmée.

1. Je commencerai par résumer le théorème de l'équivalence des transformations tel que je l'ai exposé dans mon premier Mémoire, afin de pouvoir y rattacher ce qui va suivre.

Si un corps accomplit une série circulaire de changements, on peut y gagner un certain travail extérieur, mais on y perd en même temps une certaine quantité de chaleur ; ou bien réciproquement on peut y consommer du travail et gagner par là de la chaleur. Cela peut être exprimé ainsi : *Par la série circulaire de changements, de la chaleur peut être transformée en travail ou du travail en chaleur.*

La série circulaire de changements peut en outre avoir un autre effet, à savoir que de la chaleur est transmise d'un corps à un autre, par cela que le corps variable prend de la chaleur de l'un de ces corps et en donne à l'autre. Dans ces opérations, les corps entre lesquels s'effectue la transmission de chaleur ne doivent être considérés que comme des réservoirs de chaleur, dont il n'est nécessaire de connaître que les températures. Si les températures de ces deux corps sont différentes, il s'opère, d'après la direction de la transmission, un passage de chaleur d'un corps plus chaud à un corps plus froid ou d'un corps plus froid à un corps plus chaud. Une telle transmission de chaleur peut aussi, pour l'uniformité des termes, être exprimée comme une *transformation*, en disant que *de la chaleur d'une température est transformée en chaleur d'une autre température.*

Ces deux sortes de transformations sont entre elles dans une certaine connexion, si bien qu'elles se commandent respectivement et que l'une peut remplacer l'autre. Si l'on nomme *équivalentes* de telles transformations qui peuvent se remplacer réciproquement, et si l'on cherche les expressions mathématiques qui déterminent la grandeur des transformations de telle manière que les transformations équivalentes soient de grandeur égale. on trouve ce qui suit : *Si la*

quantité de chaleur Q *de la température t résulte de travail, cette transformation a la valeur d'équivalence*

$$\frac{Q}{T},$$

et si la quantité de chaleur Q *passe d'un corps de la température* t_1 *dans un autre de la température* t_2, *cette transformation a la valeur d'équivalence*

$$Q\left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}\right),$$

où T est une fonction de la température, laquelle fonction est indépendante de l'espèce d'opération par laquelle la transformation s'effectue, et T_1 et T_2 indiquent les valeurs de la fonction qui correspondent aux températures t_1 et t_2. J'ai démontré par une considération spéciale que très-vraisemblablement T n'est pas autre chose que *la température absolue*.

Ces deux expressions font connaître aussi le sens positif et négatif des transformations. Dans la première expression, si de la chaleur résulte de travail, Q sera pris comme positif, et si de la chaleur est transformée en travail, Q sera pris comme négatif. Dans la seconde, Q peut toujours être pris comme positif, puisque le sens contraire de la transformation est indiqué par cela que la différence $\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}$ peut être positive ou négative. On voit par là que le passage de chaleur d'une température plus haute à une température plus basse doit être considéré comme une transformation positive, et que le passage d'une température plus basse à une température plus élevée doit être considéré comme une transformation négative.

Si l'on exprime par ces formules les transformations qui s'accomplissent successivement dans une série circulaire de changements, le rapport qui a lieu entre elles peut être indiqué d'une manière simple et déterminée. Si la série circulaire est *susceptible de s'effectuer dans l'un ou l'autre sens* (*umkehrbar*), les transformations qui s'y opèrent successivement doivent être partie positives, partie négatives, et les valeurs d'équivalence des transformations positives seront égales,

dans leur ensemble, aux valeurs des transformations négatives, de telle sorte que la somme algébrique de toutes les valeurs d'équivalence est zéro. Si la série circulaire n'est pas susceptible de s'effectuer dans les deux sens, il n'est pas nécessaire que les valeurs d'équivalence des transformations positives et négatives soient égales, mais la différence aura lieu seulement en ce sens que les positives l'emportent. En conséquence, le théorème relatif aux valeurs d'équivalence des transformations peut être exprimé en ces termes : *La somme algébrique de toutes les transformations qui s'accomplissent dans une série circulaire de changements ne peut être que positive ou, comme limite, zéro.*

L'expression mathématique de ce théorème est la suivante. Soit dQ l'élément de chaleur donnée par le corps pendant ses changements à un réservoir quelconque de chaleur (une quantité de chaleur que le corps tire d'un réservoir y est comptée comme négative) et T la température absolue du corps au moment où il donne la chaleur, on aura, pour chaque série circulaire susceptible de s'effectuer dans les deux sens, l'équation

$$\text{(I)} \qquad \int \frac{dQ}{T} = 0,$$

et, pour toute série circulaire possible, la relation

$$\text{(I}_a\text{)} \qquad \int \frac{dQ}{T} \geqq 0.$$

2. Quoique la justesse de ce théorème puisse recevoir une démonstration rigoureusement mathématique, en admettant le principe rappelé plus haut, le théorème lui-même reste néanmoins enveloppé dans une forme abstraite sous laquelle il est difficilement accessible à l'intelligence, et l'on se sent forcé de chercher la vraie cause physique dont ce théorème est la conséquence. Comme d'ailleurs le travail intérieur et le travail extérieur ne diffèrent pas essentiellement l'un de l'autre, on peut accepter presque avec certitude qu'un théorème, exact d'une manière si générale lorsqu'il s'agit du travail extérieur, ne doit pas être limité exclusivement à ce travail, mais que, dans tous les cas où le travail extérieur se fait simultanément avec du travail

intérieur, le théorème doit trouver également son application à ce dernier.

Des considérations de cette nature m'ont conduit déjà, dans mes premières recherches sur la théorie mécanique de la chaleur, à supposer une loi générale touchant la manière dont la force agissante de la chaleur dépend de la température, laquelle loi a pour conséquence immédiate le théorème de l'équivalence des transformations dans sa forme plus complète, et donne lieu en même temps à d'autres conclusions importantes. Je veux d'abord donner cette loi et tâcher d'en éclaircir le sens au moyen de quelques explications dont je l'accompagnerai, parce que, parmi les raisons qui militent en faveur de sa justesse, celles qui ne sont pas encore claires par elles-mêmes et à cause de leur vraisemblance intrinsèque, seront successivement mises en lumière dans le cours du Mémoire. Voici donc :

Dans tous les cas où la chaleur contenue dans un corps fait un travail mécanique en surmontant des résistances, la grandeur des résistances qu'elle peut surmonter est proportionnelle à la température absolue.

Pour comprendre le sens de cette loi, il faut examiner de plus près les procédés par lesquels la chaleur peut faire du travail. Ces procédés se laissent toujours ramener à cela que la chaleur effectue d'une façon quelconque un changement dans l'arrangement des particules d'un corps. Ainsi, par exemple, les corps sont dilatés par la chaleur et en conséquence les molécules éloignées les unes des autres; en quoi il faut surmonter, d'une part, les forces attractives des molécules entre elles, et, d'autre part, des contre-forces étrangères, s'il en existe. En outre l'état d'agrégation (*Aggregatzustandt*) est modifié par la chaleur de telle façon, que des corps solides deviennent liquides et des corps solides ou liquides deviennent aériformes, changement où il y a également à surmonter des forces internes et en général aussi des forces externes. Un autre cas que je dois encore mentionner, parce qu'il est très-différent de ceux qui précèdent et qu'il montre dès lors combien sont divers les effets que l'on doit prendre ici en considération, c'est que, dans le contact de deux corps de nature différente, l'électricité est transmise de l'un de ces corps à l'autre, d'où naissent les courants thermo-électriques.

Dans les cas d'abord mentionnés, l'arrangement des molécules est changé. Comme les molécules, même pendant que le corps se trouve dans un état stationnaire, n'ont pas de situation fixe et immuable, comme au contraire elles sont toujours dans un mouvement plus ou moins étendu, on peut, quand il s'agit de *l'arrangement des molécules* dans un moment quelconque, se figurer ou un arrangement tel qu'on l'observe lorsqu'on prend chaque molécule dans la position qu'elle occupe précisément à un moment déterminé, ou bien un arrangement dans lequel chaque molécule est prise dans une situation moyenne. L'influence de la chaleur tend toujours à diminuer la cohésion entre les molécules, et, quand la cohésion est rompue, la chaleur tend à augmenter de plus en plus l'éloignement moyen. Afin de pouvoir exprimer mathématiquement cette action de la chaleur, nous indiquerons le degré de division du corps par une nouvelle quantité à introduire que nous nommerons la *disgrégation* du corps et à l'aide de laquelle nous pouvons définir l'effet de la chaleur en disant simplement *qu'elle tend à augmenter la disgrégation*. On verra plus bas comment on peut obtenir une mesure déterminée pour cette quantité.

Quant à ce qui concerne le cas dont nous avons parlé en dernier lieu, l'arrangement de l'électricité est changé. Ce changement peut être exprimé et calculé comme peut l'être le changement dans la position des molécules, et nous pouvons, lorsqu'il existe, le comprendre sous l'expression générale de *changement de l'arrangement* ou *changement de la disgrégation*.

On comprend que chacun de ces changements peut aussi avoir lieu en sens inverse, si l'influence des contre-forces est plus puissante que celle de la chaleur. J'ai également admis comme une chose démontrée que, pour produire du travail, on consomme toujours une quantité correspondante de chaleur, et que réciproquement, par la consommation du travail, on crée autant de chaleur.

3. Maintenant si nous considérons de plus près, sous le rapport des forces agissant en eux, les cas particuliers qui peuvent se présenter, nous en rencontrons d'abord un extrêmement simple, la dilatation d'un gaz permanent. On peut conclure de certaines propriétés des gaz,

qu'en eux l'attraction mutuelle des molécules dans leur éloignement moyen est très-faible, et qu'elle n'oppose en conséquence à la dilatation du gaz qu'une très-petite résistance; si bien que la résistance qu'offrent les parois du vase qui le contient fait presque équilibre à l'action totale de la chaleur. D'après cela, la pression extérieurement appréciable du gaz donne une mesure approximative pour la force de dilatation de la chaleur contenue dans le gaz, et dès lors, en vertu de la loi posée dans le numéro précédent, cette pression doit être approximativement proportionnelle à la température absolue. Et dans le fait, la justesse de ce résultat a par elle-même tant de vraisemblance en sa faveur, qu'un grand nombre de physiciens, depuis Gay-Lussac et Dalton, ont admis cette proportionnalité, sans chercher d'autres raisons, et s'en sont servis pour le calcul de la température absolue.

Pareillement, dans l'action thermo-électrique mentionnée plus haut, la force opérant contre la chaleur est une force simple et facile à déterminer. En effet, à la surface de contact de deux matières différentes, la chaleur transporte de l'une à l'autre autant d'électricité qu'il en faut pour que la contre-force résultant de la tension électrique fasse équilibre à la force mouvant l'électricité. Dans un Mémoire sur l'application de la théorie mécanique de la chaleur aux phénomènes thermo-électriques [*], j'ai déjà démontré que si le changement de température n'est pas accompagné de changements dans l'arrangement des molécules, la différence de tension produite par la chaleur doit être proportionnelle à la température absolue, ainsi que le demande notre loi.

Dans les autres cas mentionnés ci-dessus et dans la plupart de ceux qui peuvent encore se présenter, les rapports sont moins simples, parce que les forces que les molécules exercent les unes sur les autres jouent dans ces cas un rôle essentiel, et que ces forces sont aujourd'hui encore complétement inconnues. On voit bien à la vérité, si l'on considère seulement les résistances extérieures que la chaleur peut surmonter, qu'en général sa force augmente avec la température. Si par exemple on veut, au moyen d'une pression extérieure, empêcher la

---

[*] *Ann. de Pogg.*, t. XC, p. 513.

dilatation d'un corps, on doit employer à cet effet une pression d'autant plus grande qu'on le chauffe davantage, et l'on peut dès lors, même sans connaître les forces internes, conclure que la quantité totale des résistances qui peuvent être surmontées dans la dilatation, croît avec la température. Mais, sans la connaissance des forces internes, on ne saurait juger si cette quantité totale augmente justement dans la proportion exigée par notre loi. Inversement, cette loi, si on la considère comme d'ailleurs démontrée, peut servir à déterminer les résistances opposées par les forces internes.

Les forces que les molécules exercent les unes sur les autres ne sont pas d'une nature si simple, que l'on puisse remplacer chaque molécule par un simple point d'attraction; car beaucoup de cas démontrent clairement qu'il ne s'agit pas ici seulement de l'éloignement des molécules, mais encore des situations respectives des molécules les unes à l'égard des autres. Si nous considérons, par exemple, la fusion de la glace, des forces internes que les molécules exercent les unes sur les autres sont sans doute surmontées, et il y a ainsi une augmentation de la disgrégation; néanmoins les centres de gravité des molécules dans l'eau liquide sont en moyenne moins éloignés les uns des autres que dans la glace, puisque l'eau a une plus grande densité. Aussi ce phénomène singulier que l'eau se contracte quand on la chauffe au-dessus de 0° et qu'elle ne commence à se dilater qu'au-dessus de 4°, prouve-t-il que, même dans l'eau liquide, encore près du point de fusion, l'augmentation de la disgrégation n'est pas accompagnée d'une augmentation de l'éloignement moyen des molécules. En conséquence, il serait difficile, en ce qui touche les forces internes, alors même qu'on ne voudrait pas les mesurer, mais seulement les exprimer mathématiquement, de trouver pour elles une expression convenable qui admît une détermination simple de la grandeur. Toutefois cette difficulté disparaît, si l'on ne veut pas porter en compte les forces elles-mêmes, mais *le travail mécanique* nécessaire pour les surmonter dans un changement quelconque d'arrangement. Les expressions des quantités de travail sont plus simples que celles des forces correspondantes, puisque les quantités de travail peuvent être exprimées, sans autre explication, par des nombres de la même unité, que l'on peut additionner ou bien retrancher les unes des autres,

quelle que soit la différence des forces auxquelles les travaux se rapportent.

Il est donc convenable, pour l'application, de donner une autre forme à notre loi en y introduisant, au lieu des forces, le travail fait pour les surmonter. Dans cette forme nouvelle, on a

Le travail mécanique que peut faire la chaleur dans un changement quelconque d'arrangement d'un corps, est proportionnel à la température absolue dans laquelle le changement a lieu.

4. Cette loi ne parle pas du travail que la chaleur *fait*, mais de celui qu'elle *peut faire*, comme, dans la première forme de la loi, il n'est pas question des résistances que la chaleur *surmonte*, mais de celles qu'elle *peut surmonter*. Cette distinction est nécessaire par les raisons qui suivent.

Comme les forces externes auxquelles le corps est soumis durant un changement déterminé d'arrangement peuvent être fort différentes, il peut arriver aussi que la chaleur, pendant qu'elle opère un changement d'arrangement, n'a pas à surmonter toute la résistance qu'elle serait capable de vaincre. A cet égard, un exemple connu et souvent cité, c'est la dilatation d'un gaz, lorsqu'elle ne s'effectue pas dans des conditions où le gaz ait à y surmonter une contre-pression égale à sa propre force d'expansion, mais bien lorsque la dilatation résulte de ce que l'espace rempli de ce gaz est mis en communication avec un autre espace vide ou contenant du gaz de moindre pression. Il est clair que dans de tels cas, afin de déterminer la force de la chaleur, on ne doit pas considérer la résistance réellement surmontée, mais celle qui peut l'être.

De même, dans des changements d'arrangement contraires où l'action de la chaleur est surmontée par des contre-forces, il peut y avoir une différence analogue, mais en ce sens seulement que la valeur totale des forces qui surmontent l'action de la chaleur peut bien être plus grande que la force agissante de la chaleur, mais jamais moindre.

Les cas où cette distinction se présente peuvent être caractérisés de la manière suivante. Si le changement d'arrangement a lieu de manière que force et contre-force y soient égales, le changement, sous l'influence des mêmes forces, peut aussi avoir lieu en sens inverse.

Mais si un changement a lieu de telle sorte que la force surmontante y est plus grande que la force surmontée, le changement ne peut, sous l'influence des mêmes forces, avoir lieu en sens inverse. Dans le premier cas, nous disons que le changement a eu lieu *en mode d'aller et de retour;* dans le second, qu'il n'a pas eu lieu *en mode d'aller et de retour* [*].

Rigoureusement parlant, la force surmontante doit toujours être plus puissante que la force surmontée; mais comme il n'est pas nécessaire que cette différence de force soit d'une grandeur déterminée, on peut se la figurer de plus en plus petite, si bien qu'elle s'approche de la valeur zéro à chaque degré voulu. On voit par là que le cas où le changement a lieu en mode d'aller et retour est une limite extrême qu'on ne peut, il est vrai, atteindre complétement, mais dont on peut se rapprocher à volonté. On peut dès lors, dans des considérations théoriques, parler encore de ce cas comme d'un cas susceptible d'exécution réelle, et il joue même comme limite un rôle très-important dans la théorie.

Je veux à cette occasion mentionner dès à présent un autre procédé dans lequel cette distinction se rencontre pareillement. Si un corps doit donner de la chaleur à un autre par conduction ou par rayonnement (ce qui veut dire dans le cas du rayonnement où la communication est mutuelle que l'un des corps envoie à l'autre plus de chaleur qu'il n'en reçoit), le corps donnant doit être plus chaud que le corps prenant, et en conséquence entre deux corps de températures diffé-

---

[*] L'auteur de ce Mémoire emploie un terme allemand qu'on ne peut traduire littéralement en français, *umkehrbar*, qui exprime l'idée qu'un changement, opéré d'abord dans un sens, peut s'effectuer ensuite dans le sens contraire, de manière que le corps retourne par le même chemin à son état initial. Aussi traduisons-nous *umkerhbar* par *susceptible d'être effectué dans l'un et l'autre sens,* ou bien *dans les deux sens;* et, pour plus de brièveté, quand nous avons à exprimer cette sorte de mouvement de va-et-vient, nous disons que le changement a lieu *selon le mode* ou *en mode d'aller et de retour, in umkehrbarer weise.* Et, pour exprimer que le changement n'est pas susceptible d'être effectué dans les deux sens, la négation ne pouvant être exprimée comme dans le texte allemand *in nicht umkehrbarer weise,* nous disons que le changement N'A PAS lieu *en mode d'aller et de retour.* MARC DUFRAISSE.

rentes, la transmission de chaleur peut avoir lieu dans un sens et non point dans le sens contraire. Seulement si un corps avait donné de la chaleur à un autre corps d'égale température, la transmission de chaleur pourrait également s'effectuer tout aussi bien en sens contraire. Il est vrai qu'une transmission de chaleur à un corps d'égale température n'est pas possible, rigoureusement parlant; mais comme la différence de température peut être aussi petite qu'on voudra l'imaginer, le cas où la différence de température est zéro et où par conséquent le passage de chaleur est susceptible de s'effectuer dans l'un et l'autre sens (*umkehrbar*), forme la limite qu'on peut théoriquement du moins considérer encore comme possible.

5. Nous allons maintenant développer l'expression mathématique de notre loi, et cela d'abord pour le cas où le changement d'état qu'éprouve le corps dont il s'agit a lieu *en mode d'aller et de retour*. On verra plus bas que le résultat trouvé pour ce cas peut être facilement étendu à ceux où le changement n'a pas lieu en mode d'aller et de retour.

Supposons que le corps éprouve un changement quelconque d'état infiniment petit, où peuvent être changés et la quantité de chaleur qu'il contient et l'arrangement de ses particules. Soit H la quantité de chaleur que contient le corps et dH le changement de cette quantité. Soit dL le travail fait par la chaleur dans le changement d'arrangement, c'est-à-dire la somme du travail intérieur et extérieur, qui peut être positive ou négative, selon que la force agissante de la chaleur surmonte les contre-forces ou qu'elle est surmontée par elles. Nous obtiendrons la chaleur consommée à ce travail, en multipliant le travail par A, qui exprime l'équivalent de chaleur pour l'unité de travail; nous avons ainsi $\mathrm{A}d\mathrm{L}$.

La somme $d\mathrm{H} + \mathrm{A}d\mathrm{L}$ est la quantité de chaleur que le corps doit recevoir de l'extérieur, c'est-à-dire tirer d'un autre corps, pendant le changement d'état. Comme nous avons précédemment exprimé par dQ une quantité de chaleur infiniment petite que le corps changeant d'état communique à un autre, nous devons par analogie exprimer par $-d\mathrm{Q}$ la quantité de chaleur qu'il tire d'un autre corps, et nous avons l'équation

$$-d\mathrm{Q} = d\mathrm{H} + \mathrm{A}d\mathrm{L}$$

ou

$$(1) \qquad dQ + dH + A\,dL = 0 \text{ [*]}.$$

Maintenant, pour pouvoir introduire aussi la disgrégation dans les formules, nous devons d'abord fixer de quelle manière nous la déterminerons comme quantité mathématique.

---

[*] Dans mes précédents Mémoires, j'ai séparé l'un de l'autre le travail intérieur et extérieur, faits par la chaleur dans le changement d'état du corps. Si l'on exprime le premier par dI et le second par dW, l'équation (1) ci-dessus donnera

$$(a) \qquad dQ + dH + A\,dI + A\,dW = 0.$$

Comme, dans un changement d'état, l'augmentation de la chaleur existant réellement dans le corps et la chaleur consommée à du travail intérieur sont des quantités dont nous ne connaissons pas ordinairement les valeurs séparées, mais seulement la somme, et qui de plus ont cela de commun qu'elles sont complétement déterminées dès que l'état initial et l'état final du corps sont donnés, sans qu'il soit nécessaire de savoir comment le corps est passé de l'un à l'autre état, j'ai jugé convenable d'introduire une fonction qui exprime la somme de ces deux quantités, et que j'ai nommée U. D'où résulte

$$(b) \qquad dU = dH + A\,dI,$$

et la précédente équation se transforme par là en

$$(c) \qquad dQ + dU + A\,dW = 0,$$

et si l'on s'imagine cette équation intégrée pour un changement d'état fini quelconque, elle donne

$$(d) \qquad Q + U + AW = 0.$$

Ce sont les équations que j'ai formulées dans mes Mémoires de 1850 et de 1854, partie dans la forme spéciale qu'elles prennent pour des gaz permanents, partie dans la forme générale qu'elles ont ci-dessus, avec cette seule différence que j'ai adopté dans ces Mémoires le sens positif ou négatif de la quantité de chaleur d'une manière inverse à celle où je les prends ici, pour être mieux d'accord avec l'équation (I) donnée dans le n° 1. La fonction U, que j'ai introduite et qui peut recevoir des applications multiples dans la théorie de la chaleur, a été depuis l'objet de développements mathématiques très-intéressants de la part de MM. W. Thomson et Kirchhoff (voir *Phil. Mag.*, s. IV, t. IX, p. 523, et *Ann. de Pogg.*, t. CIII, p. 177). Thomson l'a nommée *The mechanical energy of a body in a given state*, et Kirchhoff, *Wirkungsfunction*. Bien que je croie

La disgrégation doit, ainsi qu'on l'a déjà dit dans le nº 2, exprimer le degré de division du corps. Ainsi, par exemple, la disgrégation d'un corps est plus grande à l'état liquide qu'à l'état solide, et plus grande à l'état aériforme qu'à l'état liquide. Si, en outre, d'une quantité donnée de matière, une partie est solide et l'autre liquide, la disgrégation sera d'autant plus grande que la partie liquide sera plus grande aussi; et pareillement si une partie est liquide et l'autre aériforme, la disgrégation sera d'autant plus grande que la partie aériforme est plus considérable. La disgrégation d'un corps est complétement déterminée, l'arrangement des particules en étant donné; mais on ne peut pas dire inversement que l'arrangement des particules d'un corps soit complétement déterminé, la grandeur de la disgrégation étant donnée. Ainsi, par exemple, dans une quantité donnée de matière, si une partie est solide et l'autre aériforme, la disgrégation peut être aussi grande que si la masse entière était liquide.

Figurons-nous maintenant que le corps change d'état sous l'influence de la chaleur (nous nous restreignons pour le moment à des changements d'état qui peuvent avoir lieu d'une manière continue et en mode d'aller et de retour, et nous supposons en même temps que le corps a une température égale dans toutes ses parties). Puisque l'augmentation de la disgrégation est le moyen par lequel la chaleur effectue du travail, la grandeur du travail doit être en rapport déterminé avec la grandeur de l'augmentation de disgrégation, et nous fixerons le mode, encore arbitraire, de déterminer la grandeur de la disgrégation de manière que, dans une température donnée, l'augmentation de la disgrégation soit proportionnelle au travail qu'y peut faire la chaleur. Notre loi détermine en outre ce qui concerne l'influence de la température. En effet, si un même changement de disgrégation a lieu à des températures différentes, le travail respectif doit être proportionnel à la température absolue. Soit donc Z la dis-

---

que ma definition originaire (voir *Ann. de Pogg.*, t. LXXIX, p. 385, et t. XCIII, p. 484) est rigoureusement juste, qu'elle exprime, si l'on sort d'un etat initial quelconque, *la somme de la chaleur qui s'ajoute à celle qui existe réellement est de la chaleur consommée à du travail intérieur*, je ne peux neanmoins faire aucune objection contre une expression abrégée.

grégation du corps et dZ un changement infiniment petit de celle-là et dL le travail infiniment petit qui lui correspond ; on peut poser

$$dL = KT\,dZ \quad \text{ou} \quad dZ = \frac{dL}{KT},$$

où K est une constante qui dépend de l'unité de mesure, encore indéterminée, d'après laquelle Z sera mesuré. Choisissons cette unité de mesure de façon qu'on obtient $K = \frac{1}{A}$, et qu'on a par conséquent l'équation

$$(2) \qquad dZ = \frac{A\,dL}{T}.$$

Figurons-nous cette équation intégrée depuis un état initial quelconque dans lequel Z a la valeur Z_0 jusqu'à l'état actuel, on aura

$$(3) \qquad Z = Z_0 + A\int\frac{dL}{T}.$$

Par là la quantité Z est déterminée, sauf une constante dépendante de l'état initial adopté.

Si la température du corps n'est pas égale dans toutes ses parties, on peut se représenter le corps divisé en autant de parties qu'on voudra, rapporter à une partie quelconque les éléments dZ et dL de l'équation (2), et poser en même temps pour T la valeur qu'a la température absolue de cette partie. Si alors les expressions des changements de disgrégation infiniment petits des parties séparées sont réunies au moyen d'une addition ou bien au moyen d'une intégration dans le cas où le nombre des parties devrait être infini, on obtient le changement de disgrégation encore infiniment petit du corps entier ; d'où on peut déduire, aussi par intégration, tout changement de disgrégation fini.

Revenons maintenant à l'équation (1) et, à l'aide de l'équation (2), éliminons-en l'élément de travail dL. Cette opération donne

$$(4) \qquad dQ + dH + T\,dZ = 0,$$

ou, si nous divisons par T,

$$\frac{dQ + dH}{T} + dZ = 0. \tag{5}$$

Figurons-nous cette équation intégrée pour un changement d'état fini, nous avons

$$\int \frac{dQ + dH}{T} + \int dZ = 0. \tag{II}$$

Dans le cas où le corps n'aurait pas une température égale dans toutes ses parties, on peut se l'imaginer de nouveau divisé en parties, rapporter d'abord à une partie séparée les éléments dQ, dH et dZ de l'équation (5), et poser pour T la température absolue de cette partie. On doit alors entendre les signes d'intégration en (II) en ce sens qu'ils embrassent les changements de toutes les parties. Il faut remarquer ici qu'on doit laisser provisoirement de côté les cas où un corps continu a en divers points des températures différentes, et où une transmission immédiate de chaleur est opérée par conduction des points plus chauds aux points plus froids; et l'on passe ces cas sous silence, parce qu'une telle transmission n'est pas susceptible d'être effectuée dans l'un et l'autre sens et que nous nous sommes restreint, pour le moment, à la considération des changements susceptibles de s'opérer dans les deux sens.

L'équation (II) est ce que nous avons cherché, à savoir l'expression mathématique de notre loi *pour tous les changements d'état d'un corps, qui s'effectuent en mode d'aller et de retour.* Il est évident que cette équation doit être également valable si, au lieu d'un changement d'état unique, on envisage une série des changements d'état se succédant les uns aux autres.

6. L'équation différentielle (4) d'où découle l'équation (II) est connexe à une équation différentielle qui résulte des théorèmes déjà connus de la théorie mécanique de la chaleur, et qui, dans le cas spécial où le corps dont il s'agit est un gaz parfait, prend d'elle-même la forme de l'équation (4).

Supposons donné un corps quelconque de volume variable sur

lequel agit, comme force extérieure, une pression exercée à la surface. Soit v le volume que prend le corps sous cette pression p, à la température T (comptée à partir du zéro absolu), et supposons que l'état du corps soit complétement déterminé par les quantités T et v. Si la quantité de chaleur que le corps doit recevoir en se dilatant, à une température constante, de dv, est exprimée par $\frac{dQ}{dv}dv$ (où, pour être mieux d'accord avec le mode d'expression employé d'ailleurs dans les équations contenues dans ce numéro, le sens positif de la quantité de chaleur est adopté autrement que dans l'équation (4), dans laquelle on a compté comme positive non pas une quantité de chaleur reçue par le corps, mais une quantité de chaleur qu'il a donnée), on a, en vertu de la théorie mécanique de la chaleur, cette équation connue

$$\frac{dQ}{dv} = AT\frac{dp}{dT}.$$

Si nous nous figurons maintenant que la température du corps est changée de dT et son volume de dv, et si nous nommons dQ la quantité de chaleur que le corps reçoit dans ce changement, nous pouvons écrire

$$dQ = \frac{dQ}{dT}dT + \frac{dQ}{dv}dv.$$

Introduisons-y la lettre c pour la quantité signifiée par $\frac{dQ}{dT}$, laquelle exprime la chaleur spécifique à volume constant, et mettons pour $\frac{dQ}{dv}$ l'expression donnée précédemment. Nous avons alors

$$dQ = c\,dT + AT\frac{dp}{dT}dv. \tag{6}$$

Puisque la pression p est la seule force extérieure que le corps doit surmonter dans la dilatation, pdv est le travail extérieur qui y est effectué, et la quantité $\frac{dp}{dT}dv$ exprime comment ce travail croît avec la température.

Si nous appliquons maintenant cette équation à un gaz parfait, la

chaleur spécifique à volume constant doit être considérée en ce cas comme la vraie chaleur spécifique qui indique l'augmentation de la quantité de chaleur existant réellement dans le gaz; car, en ce cas, il n'est pas consommé de chaleur à du travail, puisque le travail extérieur ne se fait que dans les changements de volume, et que surtout il ne se fait pas de travail intérieur dans des gaz parfaits. En conséquence, $cd\mathrm{T}$ doit être considéré comme identique à $d\mathrm{H}$. De plus, pour des gaz parfaits, on a l'équation

$$pv = \mathrm{RT},$$

où R est une constante, et l'on obtient, par conséquent,

$$\frac{dp}{d\mathrm{T}}\,dv = \frac{\mathrm{R}}{v}\,dv = \mathrm{R}d.\log v.$$

Par là l'équation (6) prend la forme suivante :

$$dQ = d\mathrm{H} + \mathrm{ART}d.\log v. \tag{7}$$

Cette équation, abstraction faite de la différence du signe positif ou négatif de dQ, qui n'a été nécessitée que par le changement du mode de désignation, s'accorde avec l'équation (4), et la fonction exprimée dans cette dernière équation par le signe général Z a, dans ce cas particulier, la forme $\mathrm{AR}\log v$.

M. Rankine, qui a écrit plusieurs Mémoires intéressants sur la transformation de chaleur en travail [*], a fait à l'équation (6), pour les autres corps, une modification semblable à celle que nous venons d'y faire pour les gaz parfaits, en posant l'équation suivante, dont je ne fais que changer un peu les lettres [**],

$$dQ = kd\mathrm{T} + \mathrm{AT}\,d\mathrm{F}, \tag{8}$$

où k exprime la vraie chaleur spécifique du corps, et où F est une quantité pour la détermination de laquelle M. Rankine paraît avoir été

---

[*] Voir *Phil. Mag.*, s. IV, t. V, p. 106; *Edinb. Phil. Journ.*, new s. t. II, p. 120; *Manual of the Steam Engine*.

[**] *Manual of the Steam Engine*, p. 310.

conduit de préférence par la circonstance mentionnée plus haut, que l'expression $\frac{dp}{dT}dv$, contenue dans l'équation (6), exprime l'accroissement, avec élévation de température, du travail extérieur opéré dans un changement de volume infiniment petit. M. Rankine définit la quantité F comme le rapport du changement du travail extérieur avec la température (*the rate of variation of effective work performed with temperature*), et comme il désigne par U le travail extérieur que le corps peut faire en passant d'un état donné à l'état actuel, il pose

$$(9) \qquad F = \frac{dU}{dT}.$$

Dans la considération qu'il y a jointe immédiatement, du cas où le travail extérieur consiste seulement à surmonter une pression extérieure, il donne l'équation

$$U = \int p dv,$$

d'où suit

$$(10) \qquad F = \int \frac{dp}{dT} dv.$$

Les intégrales y contenues doivent être prises, dans la supposition d'une température constante, depuis un volume initial donné, jusqu'au volume actuel. En plaçant cette valeur de F dans l'équation (8), M. Rankine donne à celle-ci la forme suivante :

$$(11) \qquad dQ = \left(k + AT \int_{\infty}^{v} \frac{d^2 p}{dT^2} dv\right) dT + AT \frac{dp}{dT} dv.$$

Il ne dit pas pourquoi il adopte ici comme volume initial le volume infiniment grand, quoique évidemment ce choix ne soit pas une chose indifférente.

On découvre sans difficulté que cette manière de modifier l'équation (6) est très-différente de mon développement; aussi les résultats s'écartent-ils l'un de l'autre, puisque la quantité F n'est pas identique à la quantité correspondante $\frac{1}{A}Z$, contenue dans mes équations, mais

que la première ne s'accorde avec la seconde que dans la partie qu'il est possible de déduire de données déjà connues. En effet, au moyen du dernier terme de l'équation (6), on connaît, pour la quantité à introduire, le coefficient différentiel pris par rapport à v, puisque, pour obtenir exactement ce terme, il est évident qu'on doit poser

$$\frac{dT}{dv} = \frac{1}{A}\frac{dZ}{dv} = \frac{dp}{dT}. \tag{12}$$

M. Rankine, comme cela ressort de l'équation (10), a formé la quantité T en intégrant simplement par rapport à v cette expression qui est donnée comme coefficient différentiel relatif à v. Afin de voir combien la quantité $\frac{1}{A}Z$ s'en distingue, nous allons transformer l'expression de Z donnée dans le numéro précédent.

En vertu de l'équation (2), nous avons

$$\frac{T}{A}dZ = dL,$$

où dL exprime la somme du travail intérieur et du travail extérieur faits dans le changement infiniment petit du corps. Nous désignerons par dI le travail intérieur, et comme I, dans le cas où l'état du corps est déterminé par sa température T et son volume v, doit être considéré comme fonction de ces deux quantités, nous pouvons poser

$$dI = \frac{dI}{dT}dT + \frac{dI}{dv}dv.$$

Pour le travail extérieur, supposé qu'il consiste uniquement à surmonter une pression extérieure, nous avons l'expression pdv. Par conséquent, si nous décomposons aussi la différentielle dZ en ses deux parties, nous pouvons écrire

$$\frac{T}{A}\frac{dZ}{dT}dT + \frac{T}{A}\frac{dZ}{dv}dv = \frac{dI}{dT}dT + \left(\frac{dI}{dv} + p\right)dv,$$

d'où il suit

$$\frac{T}{A}\frac{dZ}{dT} = \frac{dI}{dT}, \quad \frac{T}{A}\frac{dZ}{dv} = \frac{dI}{dv} + p. \tag{13}$$

Si nous différentions la première de ces équations par rapport à v et la seconde par rapport à T, nous obtenons

$$\frac{T}{A}\frac{d^2Z}{dT\,dv}=\frac{d^2I}{dT\,dv},$$

$$\frac{1}{A}\frac{dZ}{dv}+\frac{T}{A}\frac{d^2Z}{dT\,dv}=\frac{d^2I}{dT\,dv}+\frac{dp}{dT}.$$

En retranchant la première de ces équations de la seconde, on a

$$\frac{1}{A}\frac{dZ}{dv}=\frac{dp}{dT}.$$

Le coefficient différentiel de Z relatif à v remplit ainsi la condition donnée dans l'équation (12). En même temps le coefficient différentiel relatif à T est aussi donné par la première des équations (13), et, en réunissant ces deux coefficients, nous obtenons l'équation différentielle complète

$$(14)\qquad \frac{1}{A}dZ=\frac{1}{T}\frac{dI}{dT}dT+\frac{dp}{dT}dv.$$

Cette équation doit être intégrée, afin d'obtenir la quantité $\frac{1}{A}Z$. Cette intégrale, on le voit de prime abord, se distingue en général par une fonction de T de celle qu'on obtient si l'on ne fait qu'intégrer le dernier terme. Seulement, dans le cas où l'on a $\frac{dI}{dT}=0$, d'où s'ensuit, pour que l'équation ci-dessus soit intégrable, que l'on doit avoir aussi $\frac{d^2p}{dT^2}=0$, dans ce cas, les deux intégrales doivent être considérées comme égales; c'est ce qui arrive pour les gaz parfaits.

Ce que je crois pouvoir justement indiquer comme essentiellement neuf dans mon équation (II), c'est que la quantité Z y contenue a gagné par mon développement une signification physique précise, de laquelle il résulte que la quantité Z est complétement déterminée par l'arrangement actuel des particules du corps. Ce n'est que par là qu'il devient possible de tirer de cette équation la conclusion importante qui va suivre.

7. Nous allons chercher maintenant de quelle manière on peut arriver de l'équation (II) à l'équation (I) donnée dans le n° **1**, laquelle, en vertu du principe que j'ai posé antérieurement, doit être valable pour toute série circulaire de changements susceptible d'être effectuée dans les deux sens.

Si les changements d'état qui se succèdent forment une série circulaire, la disgrégation du corps à la fin de l'opération doit être la même qu'au commencement, et l'on doit avoir en conséquence

$$(15) \qquad \int dZ = 0,$$

d'où s'ensuit que l'équation (II) se transforme en

$$(16) \qquad \int \frac{dQ + dH}{T} = 0.$$

Afin que cette équation s'accorde avec l'équation (I), à savoir :

$$\int \frac{dQ}{T} = 0,$$

l'équation suivante doit être valable pour toute série circulaire susceptible d'être effectuée dans les deux sens

$$(III) \qquad \int \frac{dH}{T} = 0.$$

C'est cette équation qui conduit à la conséquence mentionnée dans mon préambule, laquelle s'écarte des idées généralement reçues. On peut prouver notamment que, pour la justesse de cette équation, il est et *suffisant* et *nécessaire* d'accepter le théorème suivant :

La quantité de la chaleur existant réellement dans un corps dépend seulement de sa température et non de l'arrangement de ses particules.

Il est clair, de prime abord, que l'adoption de ce théorème est *suffisante* pour l'équation (III), car si H est seulement une fonction de la température, l'expression différentielle $\frac{dH}{T}$ prend la forme $f(T)\,dT$, où $f(T)$ est évidemment une fonction réelle qui n'a qu'une seule va-

leur pour chaque valeur de T, et l'on voit facilement que l'intégrale de cette expression, si la valeur initiale et la valeur finale de T sont égales, doit être zéro.

La *nécessité* de ce même théorème peut être prouvée comme suit.

Afin de pouvoir réduire les changements d'état à des changements de certaines quantités, nous supposons que la manière dont le corps change d'état n'est pas absolument arbitraire, mais qu'elle est soumise à des conditions telles, que l'état du corps est déterminé par la température et par une seconde quantité quelconque indépendante de la température. Cette seconde quantité doit manifestement être connexe à l'arrangement des particules; on peut, par exemple, se figurer la disgrégation du corps comme une telle quantité; mais ce peut être aussi une autre quantité quelconque dépendante de l'arrangement des particules. Un cas qui se rencontre fréquemment et qui a été souvent traité est celui où le volume du corps est cette seconde quantité, qu'on peut changer indépendamment de la température et qui, jointe à la température, détermine l'état du corps. Nous exprimerons d'une manière générale par X la seconde quantité, de telle façon que T et X sont les deux quantités desquelles dépend l'état du corps.

Puisque la quantité de chaleur H, contenue dans le corps, est une quantité complétement déterminée, dans tous les cas, par l'état actuel du corps, elle doit, dans le cas où l'état du corps est déterminé par les quantités T et X, être une fonction de ces deux quantités. En conséquence, nous pouvons donner à la différentielle dH la forme suivante :

$$dH = M\,dT + N\,dX, \tag{17}$$

où M et N sont des fonctions de T et X, qui doivent satisfaire à l'équation de condition connue, à laquelle sont soumis les coefficients différentiels d'une fonction de deux variables indépendantes, à savoir :

$$\frac{dM}{dX} = \frac{dN}{dT}. \tag{18}$$

Si, en outre, l'intégrale $\int \frac{dH}{T}$ doit toujours être zéro, chaque fois que

les quantités T et X atteignent de nouveau les mêmes valeurs qu'au commencement, $\frac{dH}{T}$ doit être pareillement la différentielle complète d'une fonction de T et X. Par conséquent, comme nous pouvons, à cause de l'équation (17), écrire

$$(19) \qquad \frac{dH}{T} = \frac{M}{T} dT + \frac{N}{T} dX,$$

nous obtenons pour les coefficients différentiels, qui se trouvent dans cette formule, l'équation de condition ci-après, laquelle correspond complétement à l'équation (18) :

$$(20) \qquad \frac{d}{dX}\left(\frac{M}{T}\right) = \frac{d}{dT}\left(\frac{N}{T}\right).$$

En effectuant les différentiations, on transforme cette équation en

$$(21) \qquad \frac{1}{T}\frac{dM}{dX} = \frac{1}{T}\frac{dN}{dT} - \frac{N}{T^2},$$

et si l'on y applique l'équation (18), on a

$$(22) \qquad N = 0.$$

La quantité N est, d'après l'équation (17), le coefficient différentiel de H par rapport à X, et si ce coefficient différentiel est toujours égal à zéro, H elle-même doit être indépendante de X, et comme l'expression X peut signifier toute quantité quelconque indépendante de T, laquelle concourt avec T à déterminer l'état du corps, il s'ensuit que H ne peut être qu'une fonction de T.

8. D'après les idées généralement reçues jusqu'à ce jour, ce dernier théorème paraît être en contradiction avec des faits connus.

Je choisirai d'abord, comme exemple explicatif, un cas très-connu, et dans lequel mon théorème s'écarte singulièrement des opinions acceptées, à savoir l'eau dans ses différents états. Nous pouvons avoir, à la même température, l'eau à l'état liquide et à l'état solide, et le théorème ci-dessus exprime que la chaleur contenue dans l'eau est

égale dans les deux cas; ce que l'expérience semble contredire. La chaleur spécifique de la glace n'est que la moitié environ de celle de l'eau liquide, et ce fait semble donner lieu à la conclusion suivante : Si, à une température quelconque, une unité de poids de glace et une unité de poids d'eau liquide contenaient réellement une quantité égale de chaleur, et si l'on voulait alors les chauffer ou les refroidir l'une et l'autre, de manière à maintenir entre elles l'égalité de température, l'eau devrait pour cela recevoir ou perdre plus de chaleur que la glace, et l'égalité de la quantité de chaleur pourrait ainsi ne pas subsister à d'autres températures. Une différence, analogue à celle qu'on observe entre l'eau liquide et la glace, a lieu aussi entre l'eau liquide et la vapeur d'eau, puisque la chaleur spécifique de la vapeur est beaucoup moindre que celle de l'eau.

Afin d'expliquer cette différence, je dois rappeler ici qu'une partie seulement de la quantité de chaleur qu'un corps reçoit lorsqu'il est chauffé, sert à l'augmentation de la chaleur existant réellement dans ce corps, pendant que l'autre partie est consommée à du travail. Je crois donc que la différence de la chaleur spécifique dans les trois états d'agrégation de l'eau repose sur ce fait que la partie consommée à du travail est très-différente et, pour préciser, considérablement plus grande dans l'état liquide que dans les deux autres états [*]. Nous devons donc distinguer ici la chaleur spécifique observée de la chaleur

---

[*] J'ai déjà exprimé cette opinion dans mon premier Mémoire sur la théorie mécanique de la chaleur; car dans une remarque (*Ann. de Pogg.*, t. LXXIX, p. 376) qui a trait à la diminution de la cohésion de l'eau quand la température s'élève, j'ai dit : « Il s'ensuit en même temps qu'une partie seulement de la quantité de chaleur que l'eau reçoit de l'extérieur lorsqu'elle est chauffée doit être considérée comme chaleur libre, pendant que l'autre partie est consommée à la diminution de la cohésion. Il y a également accord entre cette opinion et la circonstance que l'eau a une chaleur spécifique beaucoup plus grande que la glace, et vraisemblablement aussi que la vapeur. » A cette époque, les recherches de M. Regnault sur la chaleur spécifique des gaz et vapeurs n'étaient pas encore publiées, et dans les Traités on lisait encore, pour la chaleur spécifique de la vapeur d'eau, le nombre 0,847, trouvé par de la Roche et Bérard; mais j'avais déjà dès lors conclu des raisons théoriques exposées ici que ce nombre devait être beaucoup trop grand, et c'est à cette conjecture que se rapportent les derniers mots de la remarque : « et vraisemblablement aussi que la vapeur. »

spécifique vraie par laquelle on doit multiplier le changement de température dT, afin d'obtenir l'augmentation correspondante de la chaleur réellement existante, et je crois devoir admettre, en vertu du théorème ci-dessus, que la vraie chaleur spécifique de l'eau est égale dans les trois états d'agrégation ; et ce qui, sous ce rapport, est vrai pour l'eau, doit naturellement être vrai aussi pour d'autres matières. Afin de déterminer expérimentalement la vraie chaleur spécifique d'une matière, on devrait l'employer comme vapeur fortement surchauffée, de manière qu'elle soit dans un état de dilatation tel, que la vapeur peut être considérée déjà, sans s'écarter sensiblement de la réalité, comme gaz parfait, et déterminer alors sa chaleur spécifique à volume constant.

M. Rankine n'est pas de mon avis en ce qui concerne la chaleur spécifique dans des états d'agrégation différents. Il dit, p. 307 de son *Manual of the Steam Engine* : « La vraie chaleur spécifique de toute substance est constante à toutes les densités, aussi longtemps que cette substance conserve le même état, solide, liquide ou aériforme; mais, lorsque la substance passe de l'un de ces trois états à un autre, ce passage est accompagné d'un changement, quelquefois considérable, de la vraie chaleur spécifique. » A la même page, il dit spécialement de l'eau que la vraie chaleur spécifique de l'eau liquide est vraisemblablement presque égale (*equal sensibly*) à la chaleur spécifique apparente, pendant que, d'après l'opinion que j'ai exprimée plus haut, elle est au-dessous de la moitié de la chaleur apparente.

Si M. Rankine accorde que, dans des états d'agrégation différents, la vraie chaleur spécifique peut être différente, je ne vois pas d'où on devrait conclure qu'elle est constante dans le même état d'agrégation. Il y a aussi, dans un seul et même état d'agrégation, par exemple dans le solide, des changements dans l'arrangement des molécules; ces changements sont, à la vérité, moins considérables, mais essentiellement de la même nature que les changements qui accompagnent le passage d'un état d'agrégation à l'autre; et, en conséquence, il me semble arbitraire de contester pour les petits changements ce que l'on accorde pour les grands. Je ne puis acquiescer en ce point à la façon dont l'ingénieux mathématicien anglais traite le sujet; loin de là : puisque je m'en tiens simplement à la loi que j'ai posée sur la force agissante de la chaleur, il n'y a, me semble-t-il, de possible que l'un

des deux cas suivants : ou cette loi est juste, et alors la vraie chaleur spécifique est égale aussi bien dans des états d'agrégation différents que dans le même état d'agrégation ; ou la loi est fausse, alors nous ne savons absolument rien de précis sur la vraie chaleur spécifique, et elle peut être différente aussi bien dans le même état d'agrégation que dans des états d'agrégation différents.

9. Je crois même devoir donner à cette loi, en la supposant juste, une application encore plus étendue, notamment aux *compositions et décompositions chimiques*.

La séparation des matières unies chimiquement donne aussi une augmentation de la disgrégation, et la réunion chimique des matières séparées, une diminution de la disgrégation; et l'on peut dès lors traiter ces procédés de la même manière que la vaporisation et la condensation des vapeurs. Il résulte de plusieurs phénomènes connus que, dans ce cas aussi, la chaleur agit de manière à augmenter la disgrégation, puisque beaucoup de combinaisons peuvent être décomposées par la chaleur en leurs parties constitutives, comme, par exemple, l'oxyde de mercure, et l'eau elle-même à une température très-élevée. On pourrait peut-être objecter à cela que, dans d'autres cas, l'élévation de température agit de manière à favoriser la combinaison de deux matières comme, par exemple, l'hydrogène et l'oxygène, qui ne se combinent pas à une température basse, mais bien à une température élevée. Toutefois je crois qu'ici la chaleur n'exerce qu'une action secondaire, en portant les atomes dans de telles situations, les uns à l'égard des autres, que leurs forces propres, en vertu desquelles ils cherchent à s'unir, peuvent entrer en activité. La chaleur elle-même, d'après mon opinion, ne peut jamais agir pour unir, mais seulement et toujours pour séparer.

Une autre circonstance qui, dans ce cas, rend plus difficile l'étude du sujet, c'est que, dans les conclusions ci-dessus, on supposait toujours que les changements respectifs peuvent avoir lieu d'une manière continue et en mode d'aller et de retour, ce qui, dans les procédés chimiques, selon la manière dont nous les produisons, n'a pas lieu habituellement. Cependant il y a des cas où cette condition est remplie, particulièrement dans les changements chimiques qui s'effectuent

sous l'influence de forces électriques. Nous pouvons au moyen du courant galvanique produire, d'une manière simple, des compositions et des décompositions, où l'appareil dans lequel s'effectue le procédé chimique forme lui-même un élément galvanique dont la force électromotrice ou contribue à augmenter le courant, ou doit être surmontée par d'autres forces électromotrices, de façon que dans un cas il y a gain et dans l'autre perte de travail.

Je pense que nous pourrions de même, dans tous les cas, en gagnant ou perdant du travail, diriger à volonté l'union et la séparation des matières, si nous possédions les moyens d'agir aussi à notre volonté sur chacun des atomes et de les porter dans toutes les positions voulues. Je pense de même que la chaleur, abstraction faite de ses effets secondaires, opère, dans tous les procédés chimiques, d'une manière déterminée, en ce sens qu'elle rend plus difficile l'union des atomes et qu'elle en facilite la séparation; et, de plus, je crois que la puissance de cette action est également soumise à la loi générale que j'ai donnée plus haut.

Si cela est exact, le théorème déduit de cette loi doit recevoir ici son application, et une matière composée chimiquement doit contenir autant de chaleur que ses parties constitutives à l'état séparé en contiendraient à la même température. D'où suit que la vraie chaleur spécifique de toute combinaison doit pouvoir être calculée d'une manière facile d'après les vraies chaleurs spécifiques des matières simples. Si l'on considère, en outre, le rapport entre les chaleurs spécifiques des matières simples et les poids atomiques de celles-ci, rapport que je crois non-seulement approximatif, mais encore complétement exact, pour les vraies chaleurs spécifiques, on voit quelles simplifications considérables la loi posée, si elle est juste, peut apporter dans la théorie de la chaleur.

10. Après ces développements, je puis présenter le théorème de l'équivalence des transformations dans la forme plus générale dont j'ai parlé en commençant.

Dans le n° **1**, j'ai fait mention de deux sortes de transformations : premièrement la transformation de travail en chaleur et réciproquement; secondement la transmission de chaleur entre des corps de tem-

pératures différentes. A ces deux sortes de transformations, nous ajouterons maintenant, comme troisième, le changement de la disgrégation d'un corps, et cela dans ce sens que nous considérons l'augmentation de la disgrégation comme transformation positive, et la diminution comme transformation négative.

Nous allons d'abord mettre en rapport l'une avec l'autre la première transformation et la dernière, ce qui ramènera les mêmes circonstances dont il a été déjà question dans le n° 5. Si un corps change sa disgrégation en mode d'aller et de retour, ce changement est accompagné d'une transformation entre chaleur et travail, et nous pouvons déterminer les valeurs d'équivalence des deux sortes de transformations en comparant l'une avec l'autre les transformations qui s'effectuent simultanément.

Si nous supposons, premièrement, *qu'il y a un changement d'arrangement déterminé à des températures différentes*, la quantité de chaleur qui y est transformée en travail, ou bien produite par du travail, est différente, et, en vertu de notre loi, elle est proportionnelle à la température absolue. Si nous considérons maintenant comme équivalentes les transformations qui correspondent à un seul et même changement d'arrangement, il s'ensuit que, pour la détermination des valeurs d'équivalence de ces transformations, nous devons diviser les quantités de chaleur respectives par les températures absolues qui y sont relatives. La production de la quantité de chaleur Q par du travail doit donc, si elle a lieu à la température T, avoir la valeur d'équivalence

$$\frac{Q}{T}\,\text{constante},$$

et si nous donnons à la constante, qui peut être choisie arbitrairement, la valeur égale à 1, nous obtenons l'expression mentionnée dans le n° **1**.

Si nous supposons, en second lieu, *qu'il s'opère, à une température déterminée, des changements d'arrangement différents*, accompagnés d'une augmentation de disgrégation, et si, de plus, nous posons comme règle que de telles augmentations de disgrégation, où des quantités égales de chaleur sont transformées en travail, doivent être considérées

comme équivalentes les unes aux autres, et que leur valeur d'équivalence, comparée avec celle de la transformation simultanée de chaleur en travail, doit avoir la même grandeur absolue, mais le signe opposé, nous avons par là une base pour la détermination des valeurs d'équivalence des changements de disgrégation.

En combinant ces deux règles, nous pouvons aussi déterminer la valeur d'équivalence d'un changement de disgrégation qui a lieu à des températures différentes, et nous obtenons par là l'expression donnée au nº 5. En effet, si nous désignons par $d\mathrm{L}$ un élément du travail produit dans le changement de disgrégation, élément qui consomme la quantité de chaleur $\mathrm{A}d\mathrm{L}$, et par la différence $\mathrm{Z} - \mathrm{Z}_0$ la valeur d'équivalence du changement de disgrégation, on aura

$$\mathrm{Z} - \mathrm{Z}_0 = \mathrm{A}\int \frac{d\mathrm{L}}{\mathrm{T}}.$$

Enfin, quant au procédé cité plus haut comme deuxième sorte de transformation, à savoir la transmission de chaleur entre des corps de températures différentes, ce procédé, lorsqu'il a lieu dans des changements d'état susceptibles d'aller et de retour, peut résulter seulement de ce qu'à l'une des températures, de la chaleur est transformée en travail, et, à l'autre, du travail en chaleur; en conséquence, cette sorte de transformation est déjà comprise sous la première. On peut surtout dans le développement des formules mathématiques, comme je l'ai déjà dit dans mon précédent Mémoire, considérer toujours une transformation de la seconde sorte comme une combinaison de deux transformations de la première.

Nous allons revenir maintenant à l'équation (II), à savoir :

$$\int \frac{d\mathrm{Q} + d\mathrm{H}}{\mathrm{T}} + \int d\mathrm{Z} = 0.$$

Ici $d\mathrm{H}$ est l'augmentation, pendant un changement d'état infiniment petit, de la quantité de chaleur contenue dans le corps, et $d\mathrm{Q}$ est la chaleur donnée à l'extérieur. La somme $d\mathrm{Q} + d\mathrm{H}$ est donc la quantité de chaleur qui, si elle est positive, doit avoir été produite par du travail, et, si elle est négative, avoir été transformée en travail. En consé-

quence, la première intégrale dans l'équation ci-dessus est la valeur d'équivalence de la somme des transformations de la première sorte, et la seconde intégrale exprime les transformations de la troisième sorte; et la somme de toutes ces transformations doit être, comme le dit l'équation, égale à zéro.

D'après cela, le théorème, en tant qu'il concerne les changements d'état en mode d'aller et de retour, peut être exprimé de la manière suivante :

Si nous supposons la valeur d'équivalence $\frac{Q}{T}$ *pour la production de la quantité de chaleur* Q *par du travail, effectuée à la température absolue* T, *on peut introduire, comme deuxième transformation correspondante, une quantité en rapport avec le changement d'arrangement du corps, laquelle est déterminée complétement par l'état initial et final du corps et remplit la condition que, dans tout changement d'état susceptible d'être effectué dans les deux sens, la somme algebrique des transformations est égale à zéro.*

11. Nous devons rechercher maintenant de quelle manière se modifie le théorème ci-dessus, si nous mettons de côté la condition que tous les changements d'état du corps ont lieu en mode d'aller et de retour.

De ce que nous avons dit, dans le n° 4, sur les changements d'état qui ne sont pas susceptibles d'être opérés dans les deux sens, nous pouvons conclure facilement que les trois sortes de transformations se comportent de la manière suivante, commune à toutes les trois. Une transformation négative ne peut jamais s'effectuer sans une transformation positive simultanée, dont la valeur d'équivalence est, pour le moins, aussi grande; au contraire, les transformations positives ne sont pas nécessairement liées à des négatives de même grandeur, mais elles peuvent être accompagnées de transformations négatives plus petites, ou avoir lieu en l'absence complète de ces dernières.

Afin que de la chaleur soit transformée en travail, ce qui est une transformation négative, il doit s'opérer un changement de disgrégation positif, qui ne peut être au-dessous de la grandeur déterminée, que nous considérons comme d'égale valeur. Mais, dans la transformation positive de travail en chaleur, la chose se comporte autrement. Si la

force de la chaleur est surmontée par des contre-forces, et qu'il en résulte un changement de disgrégation négatif, nous savons que les forces surmontantes y peuvent être plus grandes qu'il n'est nécessaire pour atteindre ce résultat. Cette différence de forces peut imprimer aux particules respectives de la masse des mouvements de vitesses considérables, et ces mouvements peuvent ensuite se convertir en des mouvements moléculaires que nous nommons chaleur, de telle façon qu'en somme il est transformé plus de travail en chaleur qu'il ne faut pour correspondre au changement de disgrégation négatif. Dans quelques procédés, spécialement dans le frottement, la transformation de travail en chaleur peut aussi avoir lieu en l'absence complète de transformations négatives simultanées.

Ce qui précède a déjà exprimé aussi comment se comporte, sous ce rapport, la troisième sorte de transformation, c'est-à-dire le changement de disgrégation. Le changement de disgrégation positif peut bien être plus grand, mais non plus petit que la transformation de chaleur en travail qui l'accompagne, et le changement de disgrégation négatif peut bien être plus petit, mais non plus grand que la transformation de travail en chaleur.

Enfin, en ce qui touche la seconde sorte de transformation, c'est-à-dire la transmission de chaleur entre des corps de températures différentes, j'ai cru pouvoir poser comme un principe fondamental, qui, d'après tout ce que nous savons de la chaleur, doit être considéré comme évident, que le passage d'une température plus basse à une température plus élevée, valant comme transformation négative, ne peut avoir lieu de lui-même, c'est-à-dire sans une transformation positive simultanée. Au contraire, le passage inverse de chaleur d'une température plus haute à une température plus basse peut très-bien avoir lieu sans une transformation négative simultanée.

Nous allons maintenant, eu égard à ces circonstances, examiner encore une fois comment nous sommes arrivés dans le nº 5 à l'équation (II). Dans l'équation (2), contenue dans ce même numéro, on a exprimé le rapport entre un changement de disgrégation infiniment petit et le travail y effectué par la chaleur, sous la condition que le changement a lieu en mode d'aller et de retour. S'il n'est pas nécessaire que cette dernière condition soit remplie, le changement de disgrégation,

dans le cas où il est positif, peut être plus grand que la valeur calculée d'après le travail, et, dans le cas où il est négatif, il peut, absolument parlant, être plus petit, ce qui algébriquement doit être aussi exprimé comme plus grand. Donc, au lieu de l'équation (2), nous devons écrire

$$(2_a) \qquad dZ \geqq \frac{A\,dL}{T},$$

ce qui doit être appliqué à l'équation (1); d'où, au lieu de l'équation (5), nous obtenons

$$(5_a) \qquad \frac{dQ + dH}{T} + dZ \geqq 0.$$

Reste encore la question de savoir quelle modification subiront ces formules, si, dans le corps dont il s'agit, des transmissions directes de chaleur ont lieu entre des parties de températures différentes.

Dans le cas où le corps n'a pas partout une température égale, on ne doit pas rapporter l'expression différentielle contenue dans (5_a) au corps entier, mais seulement à une partie dont la température peut être considérée comme égale, et, si la température change d'une manière continue dans le corps, on doit même admettre le nombre des parties comme infiniment grand. Dans l'intégration, on peut réunir les expressions qui se rapportent aux parties séparées dans une expression qui se rapportera au corps entier, en étendant l'intégrale, non pas seulement aux changements d'une des parties, mais encore aux changements de toutes. C'est dans la formation de cette intégrale qu'il faut avoir égard à la transmission de chaleur entre les parties.

Il est à remarquer ici que dQ est un élément de la chaleur que le corps variable dont il s'agit donne à un corps étranger, ou qu'il reçoit de ce même corps, qui ne nous sert que de réservoir de chaleur, et qu'en conséquence cet élément n'entre point en considération dans le cas actuel où il est question de la chaleur qui se transmet entre les parties du corps variable. Cette transmission de chaleur s'exprime mathématiquement par cela que la quantité de chaleur H diminue dans une partie et s'accroît d'autant dans l'autre; et dès lors, dans l'expression différentielle (5_a), nous n'avons à porter notre attention que sur le terme

$\frac{dH}{T}$. Si nous nous figurons maintenant que la quantité de chaleur infiniment petite dH abandonne une partie du corps de la température T_1 et passe dans une autre partie de la température T_2, il en résulte ces deux termes infiniment petits contenus dans l'intégrale :

$$-\frac{dH}{T_1} \quad \text{et} \quad +\frac{dH}{T_2},$$

et, comme on doit avoir $T_1 > T_2$, il s'ensuit que le terme positif est toujours plus grand que le terme négatif, et qu'en conséquence la somme algébrique des deux termes est positive. On peut dire la même chose de tous les autres éléments de chaleur transmis d'une partie à une autre, et, en conséquence, le changement qu'éprouve, par ces transmissions de chaleur, l'intégrale de toute l'expression différentielle contenue dans (5_a), consistera seulement en ceci qu'une quantité positive s'ajoute encore à la valeur qu'on obtiendrait sans ces transmissions. Comme, d'après (5_a), cette première valeur, qu'on obtiendrait sans égard aux transmissions directes de chaleur, ne peut déjà être plus petite que zéro, elle le sera d'autant moins, si elle est augmentée d'une quantité positive.

Nous pouvons donc, eu égard à toutes les circonstances qui se rencontrent dans les changements non susceptibles d'être effectués dans les deux sens, écrire généralement, au lieu de l'équation (II) :

$$(\mathrm{II}_a) \qquad \int \frac{dQ + dH}{T} + \int dZ \geqq 0.$$

Le théorème qui, dans le n° **1**, n'a été donné que pour des séries circulaires de changements, et exprimé au moyen de la relation (I_a), a donc maintenant une forme plus générale, et peut être rendu de la manière suivante :

La somme algébrique de toutes les transformations qui ont lieu dans un changement d'état quelconque, ne peut être que positive, ou zéro comme limite.

Dans mon précédent Mémoire, en parlant de deux transformations opposées, selon le signe, qui s'entre-détruisent l'une l'autre dans la somme algébrique, j'ai employé l'expression qu'elles se *compensent*.

En conséquence, si l'on nomme *transformation non compensée* la partie qui n'est pas détruite par la compensation, on peut formuler le théorème précédent plus brièvement encore :

Des transformations non compensées ne peuvent être que positives.

12. En terminant, nous allons considérer de plus près encore l'intégrale

$$\int \frac{dH}{T}$$

qui s'est déjà présentée plusieurs fois. Nous nommerons cette intégrale, prise depuis un état initial donné jusqu'à l'état actuel du corps, *valeur de transformation de la chaleur du corps comptée à partir de l'état initial donné.* Si notamment du travail est transformé en chaleur ou de la chaleur en travail, de quelque manière que ce soit, et si par ce procédé la quantité de chaleur existant dans le corps est changée, l'accroissement ou la diminution de cette intégrale représente la valeur d'équivalence des transformations qui ont eu lieu. Si, en outre, des transmissions de chaleur s'effectuent dans un corps ou dans un système de corps entre des parties de températures différentes, la valeur d'équivalence de ces transmissions de chaleur est de même exprimée par l'accroissement ou la diminution de cette intégrale, si on l'étend à tout le système de corps dont il s'agit.

Afin de pouvoir effectuer réellement l'intégration indiquée, nous devons connaître le rapport entre la quantité de chaleur H et la température T. Soit m la masse du corps et c sa vraie chaleur spécifique ; on devra, s'il change partout sa température de dT, poser :

$$(23) \qquad dH = mc\,dT.$$

La vraie chaleur spécifique d'un corps est, d'après ce qui a été dit plus haut, indépendante de l'arrangement de ses particules, et comme il y a un état, notamment l'état de gaz parfait, où l'on doit, partie à cause des données expérimentales, partie à cause de raisons théoriques, considérer comme hors de doute que la vraie chaleur spécifique est indépendante de la température, on peut conclure la même chose pour les autres états d'agrégation, et considérer absolument la vraie chaleur

spécifique comme *constante*. D'où il suit que la chaleur contenue dans le corps est simplement proportionnelle à sa température absolue, et qu'on peut poser

$$(24) \qquad H = mc\mathrm{T}.$$

Dans le cas où le corps n'est pas homogène, où, au contraire, ses parties sont de matières différentes, mais ayant toutes la même température T, on peut appliquer de même l'équation ci-dessus, en y introduisant pour c la valeur moyenne correspondante. Mais, si la température est différente dans les diverses parties, on doit d'abord appliquer l'équation ci-dessus aux parties séparées, et puis faire la somme. Si nous supposons, pour plus de généralité, que la température change d'une façon continue, si bien que l'on doit diviser le corps en un nombre infini de parties, on aura l'équation

$$(25) \qquad H = \int c\mathrm{T}\,dm.$$

Si l'on applique ces expressions à l'intégrale ci-dessus qui exprime la valeur de transformation de la chaleur du corps, et si l'on désigne par T_0 la température initiale, on obtient, pour le cas le plus simple où la température est partout égale,

$$(26) \qquad \int \frac{dH}{\mathrm{T}} = mc\int_{\mathrm{T}_0}^{\mathrm{T}} \frac{d\mathrm{T}}{\mathrm{T}} = mc\log\frac{\mathrm{T}}{\mathrm{T}_0},$$

et, comme expression générale applicable à tous les cas, on a

$$(27) \qquad \int \frac{dH}{\mathrm{T}} = \int c\log\frac{\mathrm{T}}{\mathrm{T}_0}\cdot dm.$$

Si un corps change sa disgrégation, sans qu'il lui soit donné ou tiré de chaleur de l'extérieur, la quantité de chaleur qu'il contient doit varier par la consommation ou la production de chaleur, qui accompagne le changement de disgrégation, ce qui doit avoir pour conséquence un abaissement ou une élévation de sa température; et l'on peut dès lors poser la question de savoir combien grand doit être le changement de disgrégation pour produire un certain changement de

température, supposé que tous les changements d'état ont lieu en mode d'aller et de retour. On doit appliquer, dans ce cas, l'équation (II) et y mettre $dQ = 0$; d'où elle se change en

$$\int \frac{dH}{T} + \int dZ = 0. \tag{28}$$

Supposé, pour plus de simplicité, que le corps entier change uniformément sa température, de sorte que T a toujours la même valeur pour toutes les parties, on peut alors employer l'équation (26) à la détermination de la première de ces deux intégrales, et l'on obtient par là, pour le changement de disgrégation cherché, l'équation suivante

$$Z - Z_0 = mc \log \frac{T_0}{T}. \tag{29}$$

Si l'on voulait refroidir un corps jusqu'au zéro absolu de la température, le changement de disgrégation correspondant devrait être infiniment grand, ainsi que le démontre la précédente formule dans laquelle on doit poser pour ce cas $T = 0$. Par là il est demontré, en vertu d'un principe général, qu'on ne peut jamais produire, par des changements quelconques d'état d'un corps, un refroidissement tel, qu'on arrive jusqu'au zéro absolu.

SUR LA FORME

$x^2 + 8y^2 + 8z^2 + 64t^2$;

Par M. J. LIOUVILLE.

La détermination du nombre N des représentations d'un entier donné, par la forme

$$x^2 + 8y^2 + 8z^2 + 64t^2,$$

n'offre aucune difficulté quand cet entier est pair. Il est d'abord évident que s'il est impairement pair, on a $N = 0$. Et s'il est pairement pair, de sorte qu'on puisse le représenter par $2^\alpha m$ avec $\alpha > 1$, l'équation

$$2^\alpha m = x^2 + 8y^2 + 8z^2 + 64t^2$$

exigera que x soit pair; en remplaçant donc x par $2x$ et divisant par 4, on se trouvera conduit à l'équation

$$2^{\alpha-2} m = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 16t^2$$

que nous avons discutée dans le cahier de mai.

Quant au cas d'un entier impair m, j'observe que l'on a $N = 0$, si cet entier m est de l'une des trois formes $8\mu + 3$, $8\mu + 5$, $8\mu + 7$. Nous ferons donc $m = 8\mu + 1$, et la valeur de N se calculera alors comme il suit.

On cherchera la somme $\zeta_1(m)$ des diviseurs de m, qui jouera ici un rôle important, mais qu'il faudra combiner avec deux autres fonctions numériques. L'une de ces deux fonctions est la somme

$$\sum (-1)^{\frac{i-1}{2}} i$$

relative aux entiers positifs i qui peuvent figurer dans l'équation

$$m = i^2 + 4s^2,$$

où l'entier s (qui sera pair à cause de $m = 8\mu + 1$) doit être pris négativement comme positivement quand il ne se réduit pas à zéro. L'autre fonction se rattache aussi à une équation que nous avons souvent employée, savoir à l'équation

$$m = r^2 + 2u^2,$$

où l'entier r est supposé positif, tandis que l'entier u est indifféremment positif, nul ou négatif. La fonction dont il s'agit s'exprime par

$$\sum (-1)^{\frac{r-1}{2}+\frac{r^2-1}{8}} r,$$

ou bien encore, en employant un signe de Legendre avec la signification étendue que lui a donnée Jacobi, par

$$\sum \left(\frac{-2}{r}\right) r.$$

Cela posé, on a

$$N = \frac{1}{2}\left[\zeta_1(m) + \sum (-1)^{\frac{i-1}{2}} i\right] + \sum (-1)^{\frac{r-1}{2}+\frac{r^2-1}{8}} r.$$

Ainsi pour $m = 1 = 1^2 + 4.0^2 = 1^2 + 2.0^2$, on a $N = 2$, ce qui est exact. Pour $m = 9$, on a les équations

$$9 = 3^2 + 4.0^2, \quad 9 = 3^2 + 2.0^2, \quad 9 = 1^2 + 2(\pm 2)^2,$$

et l'on en conclut

$$N = \frac{1}{2}(13 - 3) + 3 + 2 = 10,$$

ce qui s'accorde avec les équations

$$9 = (\pm 3)^2 + 8.0^2 + 8.0^2 + 64.0^2,$$
$$9 = (\pm 1)^2 + 8(\pm 1)^2 + 8.0^2 + 64.0^2,$$
$$9 = (\pm 1)^2 + 8.0^2 + 8(\pm 1)^2 + 64.0^2.$$

Pour $m = 17$, les équations à considérer sont

$$17 = 1^2 + 4(\pm 2)^2, \quad 17 = 3^2 + 2(\pm 2)^2;$$

par suite

$$N = \frac{1}{2}(18 + 2) + 6 = 16,$$

et l'on trouve en effet seize représentations de 17, vu que

$$17 = (\pm 1)^2 + 8(\pm 1)^2 + 8(\pm 1)^2 + 64.0^2,$$
$$17 = (\pm 3)^2 + 8(\pm 1)^2 + 8.0^2 + 64.0^2,$$
$$17 = (\pm 3)^2 + 8.0^2 + 8(\pm 1)^2 + 64.0^2.$$

Pour $m = 25$, on a

$$25 = 5^2 + 4.0^2, \quad 25 = 3^2 + 4(\pm 2)^2, \quad 25 = 5^2 + 8.0^2;$$

donc

$$N = \frac{1}{2}(31 + 5 - 6) - 5 = 10.$$

Les équations

$$25 = (\pm 5)^2 + 8.0^2 + 8.0^2 + 64.0^2,$$
$$25 = (\pm 3)^2 + 8(\pm 1)^2 + 8(\pm 1)^2 + 64.0^2,$$

confirment ce fait.

Pour $m = 33$, $m = 41$, etc., on trouve respectivement $N = 16$, $N = 32$, etc. Mais je ne veux pas pousser plus loin ces vérifications numériques.

SUR LA FORME
$x^2 + 8y^2 + 16z^2 + 64t^2$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

La détermination du nombre N des représentations d'un entier donné, par la forme

$$x^2 + 8y^2 + 16z^2 + 64t^2,$$

ne peut nous offrir aucune difficulté quand cet entier est pair. D'abord, s'il est impairement pair, on a évidemment $N = 0$. Et s'il est pairement pair, de sorte qu'on puisse le représenter par $2^\alpha m$ en prenant m impair et $\alpha > 1$, l'équation

$$2^\alpha m = x^2 + 8y^2 + 16z^2 + 64t^2$$

exigera que x soit pair, $x = 2x_1$, par conséquent se ramènera à celle-ci

$$2^{\alpha-2} m = x_1^2 + 2y^2 + 4z^2 + 16t^2,$$

qui a été l'objet d'une discussion détaillée dans le cahier de mai.

Quant au cas d'un entier impair m, j'observe que l'on a $N = 0$, si m est de l'une des trois formes $8\mu + 3$, $8\mu + 5$, $8\mu + 7$. Nous supposerons donc désormais

$$m = 8\mu + 1,$$

et voici comment nous calculerons alors N.

Il faudra d'abord chercher la valeur de la fonction $\omega_1(m)$, définie, comme à l'ordinaire, par les équations

$$m = d\delta, \quad \omega_1(m) = \sum (-1)^{\frac{\delta^2-1}{8}} d;$$

puis former, d'une part, la somme

$$\sum (-1)^{\frac{r-1}{2}} r$$

relative aux entiers positifs r qui peuvent figurer dans l'équation

$$m = r^2 + 2u^2$$

où l'entier u est indifféremment positif, nul ou négatif, et, d'autre part, la somme

$$\sum (-1)^{\frac{i-1}{2}+\frac{i^2-1}{8}} i$$

relative aux entiers positifs i qui peuvent se présenter dans l'équation

$$m = i^2 + 4s^2$$

où l'entier s, quand il n'est pas zéro, devra être pris négativement comme positivement.

Cela posé, on aura

$$N = \frac{1}{2}\left[\omega_1(m) + \sum (-1)^{\frac{r-1}{2}} r\right] + \sum (-1)^{\frac{i-1}{2}+\frac{i^2-1}{8}} i.$$

Ainsi pour $m = 1 = 1^2 + 2.0^2 = 1^2 + 4.0^2$, on a

$$N = \frac{1}{2}(1+1) + 1 = 2.$$

ce qui s'accorde avec la double équation

$$1 = (\pm 1)^2 + 8.0^2 + 16.0^2 + 64.0^2.$$

Pour $m = 9$, on a les équations

$$9 = 3^2 + 2.0^2, \quad 9 = 1^2 + 2(\pm 2)^2, \quad 9 = 3^2 + 4.0^2;$$

d'ailleurs

$$\omega_1(9) = 9 - 3 + 1 = 7.$$

Il vient donc cette fois

$$N = \frac{1}{2}(7 - 3 + 2) + 3 = 6,$$

résultat confirmé par les équations

$$9 = (\pm 3)^2 + 8.0^2 + 16.0^2 + 64.0^2,$$
$$9 = (\pm 1)^2 + 8(\pm 1)^2 + 16.0^2 + 64.0^2,$$

qui fournissent pour l'entier 9 six représentations.

Pour $m = 17$, comme $\omega_1(17) = 18$, et que l'on a

$$17 = 3^2 + 2(\pm 2)^2, \quad 17 = 1 + 4(\pm 2)^2,$$

je trouve

$$N = \frac{1}{2}(18 - 6) + 2 = 8;$$

et cela s'accorde avec les équations

$$17 = (\pm 1)^2 + 8.0^2 + 16(\pm 1)^2 + 64.0^2,$$
$$17 = (\pm 3)^2 + 8(\pm 1)^2 + 16.0^2 + 64.0^2,$$

qui donnent pour 17 huit représentations.

Pour $m = 25$, il faut considérer les équations

$$25 = 5^2 + 2.0^2, \quad 25 = 5^2 + 4.0^2, \quad 25 = 3^2 + 4(\pm 2)^2,$$

d'ailleurs $\omega_1(25) = 25 - 5 + 1 = 21$: donc

$$N = \frac{1}{2}(21 + 5) - 5 + 6 = 14;$$

or 25 a en effet quatorze représentations exprimées par les égalités multiples

$$25 = (\pm 5)^2 + 8.0^2 + 16.0^2 + 64.0^2,$$
$$25 = (\pm 3)^2 + 8.0^2 + 16(\pm 1)^2 + 64.0^2,$$
$$25 = (\pm 1)^2 + 8(\pm 1)^2 + 16(\pm 1)^2 + 64.0^2.$$

Pour $m = 33$, les équations à considérer, savoir

$$33 = 1^2 + 2(\pm 4)^2, \quad 33 = 5^2 + 2(\pm 2)^2,$$

appartiennent toutes les deux au type

$$m = r^2 + 2n^2;$$

il n'y en a point pour le type

$$m = i^2 + 4s^2.$$

Comme d'ailleurs

$$\omega_1(33) = 33 - 11 - 3 + 1 = 20,$$

notre formule donne

$$N = \frac{1}{2}(20 + 2 + 10) = 16;$$

ce qui s'accorde avec les égalités

$$\begin{aligned}
33 &= (\pm 5)^2 + 8(\pm 1)^2 + 16.0^2 + 64.0^2,\\
33 &= (\pm 3)^2 + 8(\pm 1)^2 + 16(\pm 1)^2 + 64.0^2,\\
33 &= (\pm 1)^2 + 8(\pm 2)^2 + 16.0^2 + 64.0^2.
\end{aligned}$$

Pour $m = 41, 49, 57$, notre formule donne respectivement $N = 8$, 18, 16; mais je passe à $m = 65$, et là trouvant

$$\omega_1(65) = 65 - 5 - 13 + 1 = 48,$$

ayant d'ailleurs à considérer les équations

$$65 = 1^2 + 4(\pm 4)^2, \quad 65 = 7^2 + 4(\pm 2)^2,$$

j'obtiens

$$N = 12;$$

et je vois que dans ce dernier exemple, comme dans tous ceux qu'on voudrait ajouter, notre formule est vérifiée, les égalités

$$\begin{aligned}
65 &= (\pm 1)^2 + 8.0^2 + 16(\pm 2)^2 + 64.0^2,\\
65 &= (\pm 1)^2 + 8.0^2 + 16.0^2 + 64(\pm 1)^2,\\
65 &= (\pm 7)^2 + 8.0^2 + 16(\pm 1)^2 + 64.0^2,
\end{aligned}$$

fournissant effectivement douze représentations.

DÉMONSTRATION D'UN THÉORÈME D'ABEL;

NOTE DE M. LEJEUNE-DIRICHLET,

COMMUNIQUÉE PAR M. LIOUVILLE.

Il s'agit de prouver que si la série

$$a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

est convergente et a pour somme A, la somme de la série

$$a_0 + a_1 \rho + a_2 \rho^2 + \ldots + a_n \rho^n + \ldots,$$

qui sera convergente à fortiori en prenant la variable ρ positive et < 1, tendra vers la limite A lorsque l'on fera tendre indéfiniment ρ vers l'unité. Causant un jour avec mon excellent et si regrettable ami Lejeune-Dirichlet, je lui disais que je trouvais assez difficile à exposer (et même à comprendre) la démonstration qu'Abel a donnée de ce théorème important. Dirichlet se mit sur-le-champ à écrire sous mes yeux, dans le seul but de me venir en aide, la Note ci-après, qui m'a été d'un grand secours et qu'on me saura gré de livrer au public. Le mode de démonstration qu'on y trouve comporte de nombreuses applications et m'a été souvent utile dans mes leçons au Collége de France.

Je transcris textuellement la Note de Dirichlet sans y rien ajouter, et bien entendu sans y rien changer.

« Il résulte de la convergence supposée de la série

$$A = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \text{ etc },$$

» que la somme

$$s_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n.$$

» reste toujours numériquement inférieure à une certaine constante k
» et converge vers la limite A, lorsque n croît indéfiniment. Considé-
» rons maintenant la série

$$S = a_0 + a_1 \rho + a_2 \rho^2 + \ldots + a_n \rho^n + \text{etc.},$$

» la quantité ρ étant supposée positive et inférieure à l'unité; en y
» remplaçant a_0, a_1, a_2, etc., par $s_0, s_1 - s_0, s_2 - s_1$, etc., elle prendra
» la forme

$$S = s_0 + (s_1 - s_0)\rho + (s_2 - s_1)\rho^2 + \ldots + (s_n - s_{n-1})\rho^n + \text{etc.},$$

» et ensuite celle-ci, en ordonnant autrement,

$$S = (1 - \rho)(s_0 + s_1 \rho + s_2 \rho^2 + \ldots + s_n \rho^n + \ldots),$$

» transposition qui ne souffre aucune difficulté, puisqu'elle se réduit à
» ajouter à la somme des $n + 1$ premiers termes le terme $-s_n \rho^{n+1}$
» qui s'évanouit pour $n = \infty$.

» Voyons maintenant vers quelle limite converge S lorsque la va-
» riable positive $\varepsilon = 1 - \rho$ devient infiniment petite. Décomposons pour
» cela S en deux parties, comprenant l'une les n premiers termes et
» l'autre tous les termes suivants, et faisons croître n à mesure que ε
» décroît, mais assez lentement pour que la limite de $n\varepsilon$ soit zéro. La
» première partie

$$(1 - \rho)(s_0 + s_1 \rho + \ldots + s_{n-1} \rho^{n-1}),$$

» étant numériquement moindre que $n\varepsilon k$, converge vers zéro. Quant à
» la seconde

$$(1 - \rho)(s_n \rho^n + s_{n+1} \rho^{n+1} + \ldots),$$

» on pourra lui donner la forme

$$P(1 - \rho)(\rho^n + \rho^{n+1} + \ldots) = P\rho^n = P(1 - \varepsilon)^n,$$

» P désignant une valeur comprise entre la plus grande et la plus pe-

» tite des quantités $s_n, s_{n+1}, \ldots$ Or ces dernières convergeant toutes vers
» la limite A, il en sera de même pour P, et comme d'un autre côté le
» facteur $(1-\varepsilon)^n$, en vertu de l'hypothèse faite plus haut, converge
» évidemment vers l'unité, il est prouvé que la limite de S, lorsque la
» variable positive $\rho < 1$ s'approche indéfiniment de l'unité, est la
» somme même A de la série considérée en premier lieu. »

Je ne pense pas que personne puisse songer désormais à demander de nouveaux éclaircissements.

EXTRAIT D'UNE LETTRE DE M. BESGE A M. LIOUVILLE.

« .... Soit m un entier donné : décomposons-le en une somme de » deux entiers positifs m', m'', de toutes les manières possibles, et con- » sidérons la somme

$$\sum \zeta_1(m')\zeta_1(m''),$$

» où je désigne avec vous par $\zeta_1(n)$ la somme des diviseurs de chaque » entier n. Vous avez calculé la valeur de cette somme quand m est » un nombre premier [*]; mais, quoique votre méthode soit générale, » vous n'avez pas écrit cette valeur pour m entier quelconque. Or, au » moyen de vos formules mêmes, j'obtiens, quel que soit m,

$$\sum \zeta_1(m')\zeta_1(m'') = \frac{1}{12}[5\zeta_3(m) - (6m-1)\zeta_1(m)],$$

» où $\zeta_3(m)$ représente la somme des cubes des diviseurs de m. Cette » formule assurément ne peut pas être nouvelle pour vous; mais quel » inconvénient y aurait-il à la transcrire dans le *Journal de Mathéma-* » *tiques*? Il suffirait, je crois, de prendre pour exemple $m = 4$. Les » deux membres sont alors respectivement

$$\zeta_1(1)\zeta_1(3) + \zeta_1(2)\zeta_1(2) + \zeta_1(3)\zeta_1(1),$$

» et

$$\frac{1}{12}[5(1^3 + 2^3 + 4^3) - (6.4 - 1)(1 + 2 + 4)]:$$

» leur commune valeur est 17. »

[*] Cahier de juillet 1858, p. 248.

MÉMOIRE

SUR

L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES;

Par C.-J. MALMSTEN.

TRADUIT LIBREMENT DU SUÉDOIS, PAR L'AUTEUR.

INTRODUCTION.

Le théorème que Jacobi a proposé dans sa *Theoria novi multiplicatoris æquationum differentialium*, chap Ier, § II, est certainement un des plus remarquables que l'analyse moderne ait présentés. En effet, il constitue pour l'intégration des équations différentielles un principe tout à fait nouveau, que l'illustre auteur appelle *le principe du dernier multiplicateur*, et qui dans ses applications nous donne accès aux résultats auparavant inconnus de cette partie difficile de la science.

Ce théorème, on le sait, nous enseigne que, si

$$X,\ X_1,\ X_2,\ldots,\ X_n$$

sont fonctions de

$$x,\ x_1,\ x_2,\ldots,\ x_n$$

et qu'aux équations différentielles

$$dx : dx_1 : dx_2 : \ldots : dx_n = X : X_1 : X_2 : \ldots : X_n,$$

on ait trouvé $n-1$ intégrales, l'intégrale $n^{ième}$ restante se trouvera toujours par de simples quadratures, pourvu que l'on puisse trouver un $\mathfrak{M}$ quelconque (toutefois non constant) qui satisfasse à l'équa-

tion [*]

$$\text{(A)} \qquad \frac{\mathrm{d}\log \mathfrak{M}}{\mathrm{d}x} + \frac{d\mathrm{X}}{\mathrm{d}x} + \frac{d\mathrm{X}_1}{\mathrm{d}x_1} + \frac{d\mathrm{X}_2}{\mathrm{d}x_2} + \ldots + \frac{d\mathrm{X}_n}{\mathrm{d}x_n} = 0.$$

Ainsi toute la difficulté se réduit à trouver une solution quelconque de l'équation (A); mais cette difficulté est assez grande pour, dans la plupart des cas, rendre chaque effort à cet égard infructueux.

On sait depuis longtemps que le plus puissant expédient que l'on ait pour surmonter en général les difficultés analytiques, consiste en des transformations convenables, c'est-à-dire, bien propres au but que l'on se propose. Il n'y a point de partie de l'analyse où elles ne remplissent le rôle le plus important; oui, on peut dire avec raison que la méthode analytique consiste principalement dans la transformation. Aussi la pensée se présente presque spontanément de transformer les formules de Jacobi en y introduisant de nouvelles variables qui, quand bien même elles ne nous laisseraient pas surmonter *généralement* les difficultés, présentent cependant de *nouveaux* cas où cela est possible. Car une telle transformation sera en effet aussi une généralisation, qui nous conduit pour ainsi dire *hors* des anciennes limites et nous apprend à connaître, outre les anciens cas d'intégration, aussi de nouveaux.

Le théorème I de ce Mémoire contient une pareille généralisation de la proposition de Jacobi. Tandis que cette proposition, comme il a déjà été dit, concerne le système des équations différentielles

$$(1) \qquad \mathrm{d}x : \mathrm{d}x_1 : \mathrm{d}x_2 : \ldots : \mathrm{d}x_n = \mathrm{X} : \mathrm{X}_1 : \mathrm{X}_2 : \ldots : \mathrm{X}_n,$$

notre théorème s'occupe de cet autre système de telles équations

$$(2) \qquad \mathrm{d}x : \mathrm{d}\varphi_1 : \mathrm{d}\varphi_2 : \ldots : \mathrm{d}\varphi_n = 1 : \psi_1 : \psi_2 : \ldots : \psi_n,$$

où $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ et $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ sont fonctions de $x, x_1, x_2, \ldots, x_n$.

---

[*] Nous suivons dans ce Mémoire le mode de notation de Jacobi et nous désignons par d la différentielle totale et par d une différentielle partielle par rapport à la variable que montre le dénominateur.

On voit facilement combien le système (2) est plus général que le système (1). Dans le cas spécial

$$\varphi_1 = x_1, \quad \varphi_2 = x_2, \ldots, \quad \varphi_n = x_n,$$

les deux systèmes coïncident entièrement.

Ce Mémoire peut être regardé comme étant divisé en trois parties. Dans la *première*, qui comprend les §§ I à IX, nous proposons le théorème I ci-dessus mentionné. Nous le déduirons d'abord comme un résultat de transformation de la célèbre proposition de Jacobi, et nous en donnerons ensuite une autre démonstration plus directe et entièrement indépendante de la *théorie du dernier multiplicateur*. Nous donnerons dans le théoreme II une autre forme à la même proposition générale, de laquelle nous déduirons aussi les deux théorèmes III et IV dont on pourra apercevoir sans difficulté l'importance pour l'intégration des équations différentielles d'un ordre quelconque. Nous demandons surtout à appeler l'attention sur les corollaires déduits de ces théorèmes, et qui nous enseignent que, si en général φ et ψ sont des fonctions de $x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$, et qu'on ait trouvé $n-1$ intégrales premières soit à l'équation

$$d\varphi = \psi . dx,$$

soit à celle-ci

$$d\varphi = y^{(n-1)} . \psi dx,$$

l'intégrale $n^{\text{ième}}$ restante se réduira toujours aux quadratures, *pour la première* aussi souvent que $y^{(n-2)}$ ne se trouve pas dans φ et $y^{(n-1)}$ non plus dans ψ, et *pour la dernière* aussi souvent que φ n'est qu'une fonction de $y^{(n-2)}$ et de $y^{(n-1)}$, et qu'en même temps $y^{(n-1)}$ ne se trouve pas dans ψ. Les formules de Jacobi nous apprennent seulement par rapport à

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \psi$$

que, quand ψ ne contient pas $y^{(n-1)}$, son intégrale $n^{\text{ième}}$ se réduira aux quadratures.

Dans la *seconde partie* de ce Mémoire, qui comprend les §§ X à

XVI, nous nous occuperons plus spécialement des équations différentielles du second ordre. Parmi ces équations

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \psi(x, y)$$

a jusqu'ici été reconnue comme la seule forme générale dont l'intégration ne dépend que des quadratures aussitôt qu'on lui a trouvé une première intégrale. Les corollaires déduits de nos théorèmes V et VI montrent que la même propriété remarquable appartient aussi aux équations beaucoup plus générales

$$\frac{d\varphi(x, y')}{dx} = \psi(x, y),$$
$$\frac{d\varphi(y, y')}{dx} = y' . \varphi(x, y).$$

Mais elle n'appartient pas seulement aux équations de cette forme qui sont toutes deux du second ordre. Dans un Mémoire de M. Liouville, « Remarques sur une classe d'équations différentielles, » inséré dans le *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. XIV, p. 225, ce célèbre mathématicien a réussi par des transformations très-ingénieuses à montrer aussi dans cette équation du troisième ordre

$$d . \frac{\varphi(z) . \frac{d^2 z}{dx^2}}{dx} = f(z) . F\left[\varphi(z) . \frac{d^2 z}{dx^2}\right]$$

la même propriété inconnue auparavant (*voir* p. 231). Cependant cette équation et celle encore plus générale que l'auteur mentionne à la fin de son Mémoire, ne sont que des cas spéciaux d'un groupe très-étendu d'équations différentielles du troisième ordre, qui jouissent de la même propriété. En effet, les corollaires que nous déduirons des théorèmes VII et VIII nous enseignent que l'on n'a besoin que de connaître *une* première intégrale aux équations

$$\frac{d\varphi(y, y'')}{dx} = \psi(y, y'),$$
$$\frac{d\varphi(y', y'')}{dx} = y'' . \psi(y, y'),$$

pour qu'en général leur intégration complète soit réduite aux quadratures.

A l'aide des théorèmes proposés dans cette seconde partie de ce Mémoire, nous avons pu complétement intégrer les équations

$$\frac{yy''}{ry'^2} = \frac{c + (y')^{\frac{1}{r}-1} . \mathfrak{F}(z)}{c + my^{1-r}},$$

$$\frac{2yy''}{ry'^2} = 1 + \frac{ax + b + cy^{1-r}}{\sqrt{(ax+b)^2 + 2c(ax+m)y^{1-r} + c^2 y^{2(1-r)}}},$$

$$\frac{y''}{(a + 2by' + y'^2)^{\frac{3}{2}}} = 2.f(u),$$

où

$$z = \frac{ax + ny^{1-r}}{c + my^{1-r}}, \quad u = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2ex + 2fy + g,$$

et résoudre aussi complétement deux problèmes géométriques très-curieux, savoir :

Trouver la courbe dont le rayon de courbure est une fonction quelconque du rayon vecteur.

Trouver une telle courbe, que pour chacun de ses points le produit de l'ordonnée et de la sous-tangente, multiplié par le rayon de courbure de la développée, soit une fonction quelconque de la normale.

Quant au premier de ces problèmes, j'en avais déjà depuis longtemps trouvé une solution que je communiquai à M. A. Svanberg, qui en présenta plus tard une autre solution dans les *Nova Acta Regiæ Societatis Upsaliensis*. Quant au second problème, il est proposé ici pour la première fois, et conduit à une équation différentielle du troisième ordre, sur l'intégration complete de laquelle on n'a pas à la première vue de très grandes espérances.

Nous traitons dans la *troisième et dernière partie* de ce Mémoire les équations différentielles du premier ordre. A l'aide des théorèmes IX et X, qui résultent immédiatement des théorèmes V et VI et dont on peut sans la moindre difficulté vérifier la justesse, nous avons intégré

un nombre assez considérable de différents groupes d'équations différentielles dont on n'avait pas auparavant, autant que nous sachions, proposé les intégrales.

Une méthode bien connue depuis longtemps d'intégrer les équations différentielles du premier ordre consiste dans la différentiation. On différentie l'équation donnée et l'on obtient ainsi une équation du second ordre. Si l'on réussit alors à trouver à cette dernière une autre intégrale première que celle sur laquelle la différentiation a été effectuée, on obtient l'intégrale cherchée en éliminant y' entre les deux intégrales premières ainsi connues.

C'est ainsi que Clairaut, dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris*, 1734, intégra l'équation différentielle connue depuis sous son nom

$$y - xy' = f(y');$$

et cette méthode peut même être appliquée avantageusement à d'autres équations analogues, comme

$$\begin{gathered} y = x.f(y') + f_1(y'), \\ x = y.f(y') + f_1(y'), \\ y - 2xy' = y'.f(yy'), \\ y.\sqrt{1+y'^2} = f(x + yy'), \end{gathered}$$

où y' entre sous une forme implicite. Mais elle est cependant limitée aux cas où le résultat de la différentiation est d'une forme si simple, que *la séparation des variables* y saute en quelque sorte aux yeux.

L'extension que nous avons donnée à cette méthode dans les théorèmes IX et X consiste principalement en ce que nous différentions l'équation donnée, *non* pour soumettre le résultat obtenu à une nouvelle intégration *immédiate,* mais pour trouver par là un facteur convenable de l'intégration. Quant à la quadrature qui se présente, elle est souvent accompagnée de si grandes difficultés, que l'on a bien besoin d'avoir la certitude qu'elle doit réussir pour ne pas en abandonner l'exécution.

En nous rappelant quel petit nombre d'équations différentielles, où

y' se présente sous une forme plus implicite, l'on a réussi à intégrer, et en considérant aussi que beaucoup de problèmes géométriques conduisent justement à des équations d'une telle forme, il nous semble que les applications que nous avons faites des théorèmes IX et X ne seront pas sans intérêt et sans importance. En effet, nous avons réussi, au moyen de ces théorèmes, à intégrer une vingtaine de classes particulières d'équations différentielles dont nous n'avons pas vu les intégrales proposées ailleurs. Quant à ce qui concerne les six premiers exemples, ils renferment des solutions d'autant de problèmes géométriques et ils ne sont pas par conséquent aussi généraux que les quatorze suivants. Parmi ces derniers, nous nous permettons de fixer l'attention principalement sur les exemples 13, 18, 19 et 20, dont les formes

$$\frac{xy' + my}{(y')^r} = f\left[\frac{xy' + ny}{(y')^s}\right],$$

$$\frac{ax + by + yy'}{\sqrt{a + by' + y'^2}} = f\left(\frac{xy' - y}{\sqrt{a + by' + y'^2}}\right),$$

$$\frac{ax + by + yy'}{\sqrt{a + by' + y'^2}} = f(y^2 + bxy + ax^2),$$

$$\frac{xy' - y}{(y' + \alpha)^{1-r}.(y' + \beta)^r} = f[(y + \alpha x)^r.(y + \beta x)^{1-r}],$$

sont si singulières, qu'elles me semblent bien mériter une telle attention.

---

§ I.

Notations. — Soient

$$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$$

des fonctions de

$$x_1, x_2, \dots, x_n;$$

nous nous servons, pour abréger, des signes suivants :

$$(3)\qquad \Delta(\varphi) = \begin{vmatrix} \frac{d\varphi_1}{dx_1}, & \frac{d\varphi_1}{dx_2}, \ldots, & \frac{d\varphi_1}{dx_n} \\ \frac{d\varphi_2}{dx_1}, & \frac{d\varphi_2}{dx_2}, \ldots, & \frac{d\varphi_2}{dx_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{d\varphi_n}{dx_1}, & \frac{d\varphi_n}{dx_2}, \ldots, & \frac{d\varphi_n}{dx_n} \end{vmatrix}$$

$$\Phi_{n-1}\left(\frac{d\varphi_r}{dx_i}\right) = \begin{vmatrix} \frac{d\varphi_1}{dx_1}, \ldots, & \frac{d\varphi_1}{dx_{i-1}}, & \frac{d\varphi_1}{dx_{i+1}}, \ldots, & \frac{d\varphi_1}{dx_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{d\varphi_{r-1}}{dx_1}, \ldots, & \frac{d\varphi_{r-1}}{dx_{i-1}}, & \frac{d\varphi_{r-1}}{dx_{i+1}}, \ldots, & \frac{d\varphi_{r-1}}{dx_n} \\ \frac{d\varphi_{r+1}}{dx_1}, \ldots, & \frac{d\varphi_{r+1}}{dx_{i-1}}, & \frac{d\varphi_{r+1}}{dx_{i+1}}, \ldots, & \frac{d\varphi_{r+1}}{dx_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{d\varphi_n}{dx_1}, \ldots, & \frac{d\varphi_n}{dx_{i-1}}, & \frac{d\varphi_n}{dx_{i+1}}, \ldots, & \frac{d\varphi_n}{dx_n} \end{vmatrix}$$

$$(4)\qquad F_{\varphi}^{(x_i)}(v) = \begin{vmatrix} \frac{d\varphi_1}{dx_1}, \ldots, & \frac{d\varphi_1}{dx_{i-1}}, & v_1, & \frac{d\varphi_1}{dx_{i+1}}, \ldots, & \frac{d\varphi_1}{dx_n} \\ \frac{d\varphi_2}{dx_1}, \ldots, & \frac{d\varphi_2}{dx_{i-1}}, & v_2, & \frac{d\varphi_2}{dx_{i+1}}, \ldots, & \frac{d\varphi_2}{dx_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{d\varphi_n}{dx_1}, \ldots, & \frac{d\varphi_n}{dx_{i-1}}, & v_n, & \frac{d\varphi_n}{dx_{i+1}}, \ldots, & \frac{d\varphi_n}{dx_n} \end{vmatrix}$$

§ II.

Lemme I. — Soient

$$w_1,\ w_2, \ldots,\ w_n$$

des fonctions de

$$\varphi_1,\ \varphi_2, \ldots,\ \varphi_n,$$

qui sont elles-mêmes fonctions de

$$x,\ x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n;$$

on a, pour $w_r = \varphi_k$,

$$\mathfrak{D}_{n-1}\left(\frac{dw_r}{dx_i}\right) = \mathfrak{D}_{n-1}\left(\frac{dw_r}{d\varphi_k}\right)\cdot \mathfrak{D}_{n-1}\left(\frac{d\varphi_k}{dx_i}\right).$$

La démonstration résulte immédiatement de la propriété des déterminants fonctionnaux qu'a démontrée Jacobi dans son Mémoire : *De determinantibus functionalibus*, prop. II. (Voir *Journal de Crelle*, t. XXII, p. 340.)

§ III.

Lemme II. — Faisons, pour abréger,

$$R = \begin{vmatrix} \frac{du}{dx}, & \frac{du}{dx_1}, \ldots, & \frac{du}{dx_r} \\ \frac{du_1}{dx}, & \frac{du_1}{dx_1}, \ldots, & \frac{du_1}{dx_r} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{du_r}{dx}, & \frac{du_r}{dx_1}, \ldots, & \frac{du_r}{dx_r} \end{vmatrix}$$

et

$$\mathfrak{P}_k(s) = \begin{vmatrix} \frac{du}{dx}, & \frac{du}{dx_1}, \ldots, & \frac{du}{dx_{k-1}}, & \frac{du}{dx_{k+1}}, \ldots, & \frac{du}{dx_r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{du_{s-1}}{dx}, & \frac{du_{s-1}}{dx_1}, \ldots, & \frac{du_{s-1}}{dx_{k-1}}, & \frac{du_{s-1}}{dx_{k+1}}, \ldots, & \frac{du_{s-1}}{dx_r} \\ \frac{du_{s+1}}{dx}, & \frac{du_{s+1}}{dx_1}, \ldots, & \frac{du_{s+1}}{dx_{k-1}}, & \frac{du_{s+1}}{dx_{k+1}}, \ldots, & \frac{du_{s+1}}{dx_r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{du_r}{dx}, & \frac{du_r}{dx_1}, \ldots, & \frac{du_r}{dx_{k-1}}, & \frac{du_r}{dx_{k+1}}, \ldots, & \frac{du_r}{dx_r} \end{vmatrix},$$

nous aurons toujours

$$\sum_{0}^{r}{}_{k} (-1)^k \cdot \frac{d\mathfrak{P}_k(s)}{dx_k} = \frac{d\mathfrak{P}_0(s)}{dx} - \frac{d\mathfrak{P}_1(s)}{dx_1} + \frac{d\mathfrak{P}_2(s)}{dx_2} - \ldots \pm \frac{d\mathfrak{P}_r(s)}{dx_r} = 0.$$

Démonstration. — Entre $\mathfrak{R}$ et $\mathfrak{L}_k(s)$ cette relation

$$(-1)^{k+s}.\,\mathfrak{L}_k(s) = \frac{d\mathfrak{R}}{\mathrm{d}\left(\frac{du_s}{\mathrm{d}x_k}\right)}$$

ayant lieu, il s'ensuit immédiatement que

$$(-1)^{k+s}.\,\frac{d\mathfrak{L}_k(s)}{\mathrm{d}\left(\frac{du_m}{\mathrm{d}x_i}\right)} = \frac{d^2\mathfrak{R}}{\mathrm{d}\left(\frac{du_s}{\mathrm{d}x_k}\right)\mathrm{d}\left(\frac{du_m}{\mathrm{d}x_i}\right)}.$$

Or, avec un peu d'attention, on reconnaît facilement que

$$\frac{d\mathfrak{L}_k(s)}{\mathrm{d}x_k} = \sum_0^r{}_m \sum_0^r{}_i \frac{d\mathfrak{L}(s)_k}{\mathrm{d}\left(\frac{du_m}{\mathrm{d}x_i}\right)}\cdot\frac{d^2u_m}{\mathrm{d}x_i\,\mathrm{d}x_k},$$

d'où nous aurons encore

$$(-1)^{k+s}\cdot\frac{d\mathfrak{L}_k(s)}{\mathrm{d}x_k} = \sum_0^r{}_m \sum_0^r{}_i \frac{d^2\mathfrak{R}}{\mathrm{d}\left(\frac{du_s}{\mathrm{d}x_k}\right)\mathrm{d}\left(\frac{du_m}{\mathrm{d}x_i}\right)}\cdot\frac{d^2u_m}{\mathrm{d}x_i\,\mathrm{d}x_k}.$$

et, en prenant la somme depuis $k = 0$ jusqu'à $k = r$,

$$(-1)^s\cdot\sum_0^r{}_k(-1)^k\cdot\frac{d\mathfrak{L}_k(s)}{\mathrm{d}x_k} = \sum_0^r{}_m \sum_0^r{}_i \sum_0^r{}_k\cdot\frac{d^2\mathfrak{R}}{\mathrm{d}\left(\frac{du_s}{\mathrm{d}x_k}\right)\cdot\mathrm{d}\left(\frac{du_m}{\mathrm{d}x_i}\right)}\cdot\frac{d^2u_m}{\mathrm{d}x_i\,\mathrm{d}x_k}.$$

Pareillement, on trouvera

$$(-1)^s.\sum_0^r{}_i(-1)^i\cdot\frac{d\mathfrak{L}_i(s)}{\mathrm{d}x_i} = \sum_0^r{}_m \sum_0^r{}_i \sum_0^r{}_k\cdot\frac{d^2\mathfrak{R}}{\mathrm{d}\left(\frac{du_s}{\mathrm{d}x_i}\right)\cdot\mathrm{d}\left(\frac{du_m}{\mathrm{d}x_k}\right)}\cdot\frac{d^2u}{\mathrm{d}x_i\,\mathrm{d}x_k},$$

d'où l'on conclura par l'addition

$$(5)\quad\left\{\begin{aligned}&(-1)^s\cdot 2\cdot\sum_0^r{}_k(-1)^k\cdot\frac{d\mathfrak{L}_k(s)}{\mathrm{d}x_k}\\ &= \sum_0^r{}_m \sum_0^r{}_i \sum_0^r{}_k\cdot\left[\frac{d^2\mathfrak{R}}{\mathrm{d}\left(\frac{du_s}{\mathrm{d}x_i}\right)\cdot\mathrm{d}\left(\frac{du_m}{\mathrm{d}x_k}\right)} + \frac{d^2\mathfrak{R}}{\mathrm{d}\left(\frac{du_s}{\mathrm{d}x_k}\right)\cdot\mathrm{d}\left(\frac{du_m}{\mathrm{d}x_i}\right)}\right]\cdot\frac{d^2u_m}{\mathrm{d}x_i\,\mathrm{d}x_k}.\end{aligned}\right.$$

Désignons à présent par $\mathfrak{R}_1$ ce que devient $\mathfrak{R}$ en y permutant i et k, et posons, pour abréger,

(6) $$\mathfrak{A} = \frac{d^2\mathfrak{R}}{\mathrm{d}\left(\frac{du_s}{\mathrm{d}x_i}\right)\cdot \mathrm{d}\left(\frac{du_m}{\mathrm{d}x_k}\right)};$$

à cause que les indices i et k ne s'y trouvent ni l'un ni l'autre, $\mathfrak{A}$ ne devient pas changé par cette permutation; d'où l'on aura

$$\mathfrak{A} = \frac{d^2\mathfrak{R}_1}{\mathrm{d}\left(\frac{du_s}{\mathrm{d}x_k}\right)\cdot \mathrm{d}\left(\frac{du_m}{\mathrm{d}x_i}\right)},$$

ou, à cause de $\mathfrak{R}_1 = -\mathfrak{R}$,

(7) $$\mathfrak{A} = -\frac{d^2\mathfrak{R}}{\mathrm{d}\left(\frac{du_s}{\mathrm{d}x_k}\right)\cdot \mathrm{d}\left(\frac{du_m}{\mathrm{d}x_i}\right)}.$$

En retranchant les formules (6) et (7) l'une de l'autre, on obtiendra

$$\frac{d^2\mathfrak{R}}{\mathrm{d}\left(\frac{du_s}{\mathrm{d}x_i}\right)\cdot \mathrm{d}\left(\frac{du_m}{\mathrm{d}x_k}\right)} + \frac{d^2\mathfrak{R}}{\mathrm{d}\left(\frac{du_s}{\mathrm{d}x_k}\right)\cdot \mathrm{d}\left(\frac{du_m}{\mathrm{d}x_i}\right)} = 0,$$

ce qui donne, en vertu de l'équation (5),

$$\sum_{0}^{r}{}_k (-1)^k \cdot \frac{d\mathfrak{P}_k(s)}{\mathrm{d}x_k} = 0.$$

§ IV.

Lemme III. — Soient

$$\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$$

des fonctions de

$$x_1, x_2, \ldots, x_n,$$

et supposons que

$$\mathrm{F}_\varphi^{(x_k)}(\psi)$$

ait la signification indiquée par la formule (4), nous aurons toujours

$$\sum_1^n {}_k \frac{d\mathrm{F}_\varphi^{(x_k)}(\psi)}{\mathrm{d}x_k} = \sum_1^n {}_k . \mathrm{F}_\varphi^{(x_k)}\left(\frac{d\psi}{\mathrm{d}x_k}\right).$$

Démonstration. — Supposons, pour abréger,

$$\vartheta_k(r) = \begin{vmatrix} \frac{d\varphi_1}{\mathrm{d}x_1}, \ldots, & \frac{d\varphi_1}{\mathrm{d}x_{k-1}}, & \frac{d\varphi_1}{\mathrm{d}x_{k+1}}, \ldots, & \frac{d\varphi_1}{\mathrm{d}x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{d\varphi_{r-1}}{\mathrm{d}x_1}, \ldots, & \frac{d\varphi_{r-1}}{\mathrm{d}x_{k-1}}, & \frac{d\varphi_{r-1}}{\mathrm{d}x_{k+1}}, \ldots, & \frac{d\varphi_{r-1}}{\mathrm{d}x_n} \\ \frac{d\varphi_{r+1}}{\mathrm{d}x_1}, \ldots, & \frac{d\varphi_{r+1}}{\mathrm{d}x_{k-1}}, & \frac{d\varphi_{r+1}}{\mathrm{d}x_{k+1}}, \ldots, & \frac{d\varphi_{r+1}}{\mathrm{d}x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{d\varphi_n}{\mathrm{d}x_1}, \ldots, & \frac{d\varphi_n}{\mathrm{d}x_{k-1}}, & \frac{d\varphi_n}{\mathrm{d}x_{k+1}}, \ldots, & \frac{d\varphi_n}{\mathrm{d}x_n} \end{vmatrix},$$

il est clair que

$$\mathrm{F}_\varphi^{(x_k)}(\psi) = \sum_1^n {}_r (-1)^{k+r} . \vartheta_k(r) . \psi_r,$$

et partant

$$\frac{d\mathrm{F}_\varphi^{(x_k)}(\psi)}{\mathrm{d}x_k} = \mathrm{F}_\varphi^{(x_k)}\left(\frac{d\psi}{\mathrm{d}x_k}\right) + \sum_1^n {}_r (-1)^{k+r} . \psi_r . \frac{d\vartheta_k(r)}{\mathrm{d}x_k}.$$

En prenant la somme depuis $k = 1$ jusqu'à $k = n$, nous aurons

$$\sum_1^n {}_k . \frac{d\mathrm{F}_\varphi^{(x_k)}(\psi)}{\mathrm{d}x_k} = \sum_1^n {}_k \mathrm{F}_\varphi^{(x_k)}\left(\frac{d\psi}{\mathrm{d}x_k}\right) + \sum_1^n {}_r (-1)^{r-1} . \psi_r . \sum_1^n {}_k (-1)^{k-1} . \frac{d\vartheta_k(r)}{\mathrm{d}x_k},$$

d'où, à cause qu'en vertu du lemme précédent

$$\sum_1^n {}_k (-1)^{k-1} . \frac{d\vartheta_k(r)}{\mathrm{d}x_k} = 0,$$

il suit

$$\sum_{1}^{n}{}_{k} \frac{d.\,\mathrm{F}_{\varphi}^{(x_k)}(\psi)}{\mathrm{d}x_k} = \sum_{1}^{n}{}_{k} .\,\mathrm{F}_{\varphi}^{(x_k)}\left(\frac{d\psi}{\mathrm{d}x_k}\right).$$

§ V.

Théorème I. — *Soient*

$$\varphi_1,\ \varphi_2,\ldots,\ \varphi_n$$

et

$$\psi_1,\ \psi_2,\ldots,\ \psi_n$$

des fonctions de

$$x,\ x_1,\ x_2,\ldots,\ x_n.$$

Considérons les équations différentielles simultanées

$$(8)\qquad \begin{cases} d\varphi_1 = \psi_1\,\mathrm{d}x \\ d\varphi_2 = \psi_2\,\mathrm{d}x \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ d\varphi_n = \psi_n\,\mathrm{d}x, \end{cases}$$

et supposons qu'on en ait trouvé $n-1$ intégrales

$$(9)\qquad w_1 = \alpha_1,\ w_2 = \alpha_2,\ldots,\ w_{n-1} = \alpha_{n-1};$$

alors, si à l'aide de ces $n-1$ équations on exprime les valeurs de

$$x_1,\ldots,\ x_{i-1},\ x_{i+1},\ldots,\ x_n$$

en x et x_i,

$$\frac{\mathfrak{M}\left[\Delta(\varphi)\ \mathrm{d}x_i - \mathrm{F}_{\varphi}^{(x_i)}\left(\psi - \frac{d\varphi}{\mathrm{d}x}\right)\cdot \mathrm{d}x\right]}{\mathfrak{D}_{n-1}\left(\frac{dw_n}{\mathrm{d}x_i}\right)}$$

sera une différentielle exacte et l'on aura

$$\int \frac{\mathfrak{M}\left[\Delta(\varphi)\ \mathrm{d}x_i - \mathrm{F}_{\varphi}^{(x_i)}\left(\psi - \frac{d\varphi}{\mathrm{d}x}\right).\,\mathrm{d}x\right]}{\mathfrak{D}_{n-1}\left(\frac{dw_n}{\mathrm{d}x_i}\right)} = \text{const.}$$

pour l'intégrale $n^{\text{ième}}$ restante des équations (8), *pourvu que* $\mathfrak{M}$ *soit tel qu'il satisfasse à*

$$\Delta(\varphi)\cdot\frac{d\log\mathfrak{M}}{dx}+\sum_{1}^{n}{}_{r}F_{\varphi}^{(x_r)}\left(\frac{d\psi}{dx_r}\right)=0.$$

Démonstration. — Dans sa *Theoria novi multiplicatoris* (voir *Journal de Crelle*, tome XXVII, page 251), Jacobi a démontré qu'ayant trouvé aux équations différentielles

$$(10)\qquad \begin{cases} d\varphi_1=p_1\,dx,\\ d\varphi_2=p_2\,dx,\\ \dots\dots\dots\dots\\ d\varphi_n=p_n\,dx,\end{cases}$$

(où $p_1, p_2,\dots, p_n$ sont des fonctions de $x, \varphi_1, \varphi_2,\dots, \varphi_n$) $n-1$ intégrales

$$(11)\qquad \begin{cases} u_1=u_1\ \ (x,\ \varphi_1,\ \varphi_2,\dots,\ \varphi_n)=\alpha_1,\\ u_2=u_2\ \ (x,\ \varphi_1,\ \varphi_2,\dots,\ \varphi_n)=\alpha_2,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ u_{n-1}=u_{n-1}(x,\ \varphi_1,\ \varphi_2,\dots,\ \varphi_n)=\alpha_{n-1},\end{cases}$$

et prenant arbitrairement deux autres fonctions

$$(12)\qquad \begin{cases} u_n\ \ =u_n\ \ (x,\ \varphi_1,\ \varphi_2,\dots,\ \varphi_n)\\ u_{n+1}=u_{n+1}(x,\ \varphi_1,\ \varphi_2,\dots,\ \varphi_n)\end{cases}$$

on aura pour l'intégrale $n^{\text{ième}}$ restante des équations (10)

$$(13)\qquad \int\frac{\mathfrak{N}}{\mathfrak{P}}(\mathfrak{v}_{n+1}\,du_n-\mathfrak{v}_n\,du_{n+1})=\text{const.},$$

si l'on pose, pour abréger,

$$(14)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{v}_n&=\frac{du_n}{dx}+p_1\frac{du_n}{d\varphi_1}+p_2\cdot\frac{du_n}{d\varphi_2}+\dots+p_n\cdot\frac{du_n}{d\varphi_n},\\ \mathfrak{v}_{n+1}&=\frac{du_{n+1}}{dx}+p_1\cdot\frac{du_{n+1}}{d\varphi_1}+p_2\cdot\frac{du_{n+1}}{d\varphi_2}+\dots+p_n\cdot\frac{du_{n+1}}{d\varphi_n},\end{aligned}$$

$$(15)\qquad \mathfrak{P} = \begin{vmatrix} \frac{du_1}{dx}, & \frac{du_1}{d\varphi_1}, & \frac{du_1}{d\varphi_2}, \ldots, & \frac{du_1}{d\varphi_n} \\ \frac{du_2}{dx}, & \frac{du_2}{d\varphi_1}, & \frac{du_2}{d\varphi_2}, \ldots, & \frac{du_2}{d\varphi_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{du_{n+1}}{dx}, & \frac{du_{n+1}}{d\varphi_1}, & \frac{du_{n+1}}{d\varphi_2}, \ldots, & \frac{du_{n+1}}{d\varphi_n} \end{vmatrix}$$

et que $\mathfrak{M}$ soit tel qu'il satisfasse à

$$(16)\qquad \frac{d \log \mathfrak{M}}{dx} + \sum_{1}^{n}{}_{k}.\frac{dp_k}{d\varphi_k} = 0.$$

L'intégration dans l'équation (13) s'effectuera toujours par de simples quadratures, parce que

$$\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{P}}(\mathfrak{v}_{n+1}.\,du_n - \mathfrak{v}_n.\,du_{n+1})$$

deviendra une différentielle exacte, si à l'aide des équations (11) et (12) les variables x, φ_1, $\varphi_2, \ldots, \varphi_n$ dans $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{v}_n$ et $\mathfrak{v}_{n+1}$ sont exprimées en $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$, u_n et u_{n+1}.

Introduisons dans cette proposition de M. Jacobi, au lieu des anciennes variables

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n,$$

de nouvelles

$$x_1, x_2, \ldots, x_n,$$

qui sont liées avec celles-là par les relations

$$(17)\qquad \begin{cases} \varphi_1 = \varphi_1(x, x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \varphi_2 = \varphi_2(x, x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varphi_n = \varphi_n(x, x_1, x_2, \ldots, x_n), \end{cases}$$

et désignons par ψ et w ce que deviennent p et u par cette substitution.

de sorte que $p_1, p_2 \ldots, p_n$, deviennent

$$\begin{array}{lcc} \psi_1(x,\ x_1,\ x_2,\ldots,\ x_n) & \text{ou, par abréviation,} & \psi_1, \\ \psi_2(x,\ x_1,\ x_2,\ldots,\ x_n) & \text{»} & \psi_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & & \cdots \\ \psi_n(x,\ x_1,\ x_2,\ldots,\ x_n) & \text{»} & \psi_n, \end{array}$$

et que $u_1, u_2, \ldots, u_n, u_{n+1}$ deviennent

$$\begin{array}{lcc} w_1(x,\ x_1,\ x_2,\ldots,\ x_n) & \text{ou, par abréviation,} & w_1, \\ w_2(x,\ x_1,\ x_2,\ldots,\ x_n) & \text{»} & w_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & & \cdots \\ w_n(x,\ x_1,\ x_2,\ldots,\ x_n) & \text{»} & w_n, \\ w_{n+1}(x,\ x_1,\ x_2,\ldots,\ x_n) & \text{»} & w_{n+1}. \end{array}$$

On voit immédiatement que, par ce changement des variables, les formules (10) et (11) se transforment en (8) et (9), et qu'il s'agit de trouver ce que deviennent $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{V}_n$, $\mathfrak{V}_{n+1}$ et l'équation (16), si à l'aide des équations (17) nous en éliminons $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$.

1° En vertu de la proposition de M. Jacobi, ci-dessus rappelée dans le Lemme I (voir *Journal de Crelle*, t. XXII, p. 340), nous tirons sans difficulté de la formule (15)

$$(18)\qquad \mathfrak{P} = \frac{1}{\Delta(\varphi)} \cdot \begin{vmatrix} \dfrac{dw_1}{dx}, & \dfrac{dw_1}{dx_1}, \ldots, & \dfrac{dw_1}{dx_n} \\ \dfrac{dw_2}{dx}, & \dfrac{dw_2}{dx_1}, \ldots, & \dfrac{dw_2}{dx_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{dw_n}{dx}, & \dfrac{dw_n}{dx_1}, \ldots, & \dfrac{dw_n}{dx_n} \\ \dfrac{dw_{n+1}}{dx}, & \dfrac{dw_{n+1}}{dx_1}, \ldots, & \dfrac{dw_{n+1}}{dx_n} \end{vmatrix}$$

2° Quant à $\mathfrak{V}_n$ et $\mathfrak{V}_{n+1}$, nous observons en premier lieu que la diffé-

rentiation partielle des équations (17) par rapport à φ_k donnera

$$0 = \frac{d\varphi_1}{dx_1}\cdot\frac{dx_1}{d\varphi_k} + \ldots + \frac{d\varphi_1}{dx_r}\cdot\frac{dx_r}{d\varphi_k} + \ldots + \frac{d\varphi_1}{dx_n}\cdot\frac{dx_n}{d\varphi_k},$$

$$0 = \frac{d\varphi_2}{dx_1}\cdot\frac{dx_1}{d\varphi_k} + \ldots + \frac{d\varphi_2}{dx_r}\cdot\frac{dx_r}{d\varphi_k} + \ldots + \frac{d\varphi_2}{dx_n}\cdot\frac{dx_n}{d\varphi_k},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$1 = \frac{d\varphi_k}{dx_1}\cdot\frac{dx_1}{d\varphi_k} + \ldots + \frac{d\varphi_k}{dx_r}\cdot\frac{dx_r}{d\varphi_k} + \ldots + \frac{d\varphi_k}{dx_n}\cdot\frac{dx_n}{d\varphi_k},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$0 = \frac{d\varphi_n}{dx_1}\cdot\frac{dx_1}{d\varphi_k} + \ldots + \frac{d\varphi_n}{dx_r}\cdot\frac{dx_r}{d\varphi_k} + \ldots + \frac{d\varphi_n}{dx_n}\cdot\frac{dx_n}{d\varphi_k},$$

d'où il suit

$$\Delta(\varphi)\cdot\frac{dx_r}{d\varphi_k} = \begin{vmatrix} \frac{d\varphi_1}{dx_1},\ldots, & \frac{d\varphi_1}{dx_{r-1}}, & 0, & \frac{d\varphi_1}{dx_{r+1}},\ldots, & \frac{d\varphi_1}{dx_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{d\varphi_k}{dx_1},\ldots, & \frac{d\varphi_k}{dx_{r-1}}, & 1, & \frac{d\varphi_k}{dx_{r+1}},\ldots, & \frac{d\varphi_k}{dx_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{d\varphi_n}{dx_1},\ldots, & \frac{d\varphi_n}{dx_{r-1}}, & 0, & \frac{d\varphi_n}{dx_{r+1}},\ldots, & \frac{d\varphi_n}{dx_n} \end{vmatrix}$$

et, si l'on multiplie par $\left(\psi_k - \frac{d\varphi_k}{dx}\right)\cdot\frac{dw_n}{dx_r}$,

$$\Delta(\varphi)\left(\psi_k - \frac{d\varphi_k}{dx}\right)\cdot\frac{dw_n}{dx_r}\cdot\frac{dx_r}{d\varphi_k} = \begin{vmatrix} \frac{d\varphi_1}{dx_1},\ldots, & \frac{d\varphi_1}{dx_{r-1}}, & 0, & \frac{d\varphi_1}{dx_{r+1}},\ldots, & \frac{d\varphi_1}{dx_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{d\varphi_k}{dx_1},\ldots, & \frac{d\varphi_k}{dx_{r-1}}, & \left(\psi_k - \frac{d\varphi_k}{dx}\right)\cdot\frac{dw_n}{dx_r}, & \frac{d\varphi_k}{dx_{r+1}},\ldots, & \frac{d\varphi_k}{dx_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{d\varphi_n}{dx_1},\ldots, & \frac{d\varphi_n}{dx_{r-1}}, & 0, & \frac{d\varphi_n}{dx_{r+1}},\ldots, & \frac{d\varphi_n}{dx_k} \end{vmatrix}$$

Prenons-en la somme depuis $k = 1$ jusqu'à $k = n$; alors, en observant ce que devient la notation (4) pour

$$v_k = \left(\psi_k - \frac{d\varphi_k}{dx}\right)\cdot\frac{dw_n}{dx_r},$$

nous aurons

$$\Delta(\varphi).\sum_{1}^{n}{}_k\left(\psi_k-\frac{d\varphi_k}{dx}\right)\cdot\frac{dw_n}{dx_r}\cdot\frac{dx_r}{d\varphi_k}=\mathrm{F}_\varphi^{(x_r)}\left[\left(\psi-\frac{d\varphi}{dx}\right)\cdot\frac{dw_n}{dx_r}\right],$$

d'où, en sommant encore depuis $r=1$ jusqu'à $r=n$, on déduit

$$\sum_{1}^{n}{}_r\sum_{1}^{n}{}_k\left(\psi_k-\frac{d\varphi_k}{dx}\right)\cdot\frac{dw_n}{dx_r}\cdot\frac{dx_r}{d\varphi_k}=\frac{\sum_{1}^{n}{}_r\mathrm{F}_\varphi^{(x_r)}\left[\left(\psi-\frac{d\varphi}{dx}\right)\cdot\frac{dw_n}{dx_r}\right]}{\Delta(\varphi)}. \tag{19}$$

Or, en vertu de la relation entre w_n et u_n, on aura sans difficulté l'équation

$$\frac{dw_n}{dx}=\frac{du_n}{dx}+\sum_{1}^{n}{}_k\cdot\frac{du_n}{d\varphi_k}\cdot\frac{d\varphi_k}{dx},$$

qui, étant retranchée de l'équation (14), donnera, en observant la transition de p_k en ψ_k,

$$\mathfrak{V}_n=\frac{dw_n}{dx}+\sum_{1}^{n}{}_k\left(\psi_k-\frac{d\varphi_k}{dx}\right)\cdot\frac{du_n}{d\varphi_k}.$$

Mais d'un autre côté on trouvera aussi

$$\frac{du_n}{d\varphi_k}=\sum_{1}^{n}{}_r\frac{dw_n}{dx_r}\cdot\frac{dx_r}{d\varphi_k},$$

d'où il suit

$$\mathfrak{V}_n=\frac{dw_n}{dx}+\sum_{1}^{n}{}_r\cdot\sum_{1}^{n}{}_k\left(\psi_k-\frac{d\varphi_k}{dx}\right)\cdot\frac{dw_n}{dx_r}\cdot\frac{dx_r}{d\varphi_k},$$

c'est-à-dire, en vertu de l'équation (19),

$$\mathfrak{V}_n=\frac{dw_n}{dx}+\frac{\sum_{1}^{n}{}_r\mathrm{F}_\varphi^{(x_r)}\left[\left(\psi-\frac{d\varphi}{dx}\right)\cdot\frac{dw_n}{dx_r}\right]}{\Delta(\varphi)}. \tag{20}$$

En mettant ici dans $\mathfrak{V}_n$ et w, $n+1$ à la place de n, on obtiendra encore

$$(21) \qquad \mathfrak{V}_{n+1} = \frac{dw_{n+1}}{dx} + \frac{\sum_{1}^{n} {}_r F_{\varphi}^{(x_r)} \left[\left(\psi - \frac{d\varphi}{dx} \right) \cdot \frac{dw_{n+1}}{dx_r} \right]}{\Delta(\varphi)}.$$

3° Reste à trouver ce que devient l'équation (16) en y exprimant les valeurs de $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, en $x, x_1, \ldots, x_n$. Or, la relation entre p_k et ψ_k donnera

$$\frac{dp_k}{d\varphi_k} = \sum_{1}^{n} {}_r \frac{d\psi_k}{dx_r} \cdot \frac{dx_r}{d\varphi_k},$$

d'où, en prenant la somme depuis $k=1$ jusqu'à $k=n$, on aura

$$\sum_{1}^{n} {}_k \cdot \frac{dp_k}{d\varphi_k} = \sum_{1}^{n} {}_k \cdot \sum_{1}^{n} {}_r \frac{d\psi_k}{dx_r} \cdot \frac{dx_r}{d\varphi_k},$$

et à l'aide de l'équation (19), en y mettant $\frac{d\psi_k}{dx_r}$ à la place de $\left(\psi_k - \frac{d\varphi_k}{dx} \right) \cdot \frac{dw_n}{dx_r}$,

$$\Delta(\varphi) \cdot \sum_{1}^{n} {}_k \cdot \frac{dp_k}{d\varphi_k} = \sum_{1}^{n} {}_r F_{\varphi}^{(x_r)} \left(\frac{d\psi}{dx_r} \right).$$

Donc, en désignant par $\mathfrak{M}$ ce que devient $\mathfrak{N}$ si l'on y substitue les valeurs de $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ données par les équations (17), on voit clairement que l'équation (16) sera changée en celle-ci :

$$(22) \qquad \Delta(\varphi) \cdot \frac{d \log \mathfrak{M}}{dx} + \sum_{1}^{n} {}_r F_{\varphi}^{(x_r)} \left(\frac{d\varphi}{dx_r} \right) = 0.$$

Par conséquent, en vertu des formules ci-dessus trouvées, (18), (20), (21) et (22), il résulte de la proposition de M. Jacobi que, si l'on a trouvé aux équations différentielles simultanées

$$(22\,bis) \qquad d\varphi_1 = \psi_1 dx, \quad d\varphi_2 = \psi_2 dx, \ldots, \quad d\varphi_n = \psi_n dx$$

(où $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ et $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ sont fonctions de $x, x_1, x_2, \ldots, x_n$) $n-1$ intégrales

$$\begin{aligned} w_1\ &(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) = \alpha_1, \\ w_2\ &(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) = \alpha_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ w_{n-1}&(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) = \alpha_{n-1}, \end{aligned}$$

et qu'on prenne arbitrairement deux autres fonctions, savoir :

$$\begin{aligned} &w_n\ (x, x_1, x_2, \ldots, x_n), \text{ ou, par abréviation, } w_n, \\ &w_{n+1}(x, x_1, x_2, \ldots, x_n), \qquad\qquad \text{»} \qquad\qquad w_{n+1}, \end{aligned}$$

on aura

$$\int \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{P}} (\mathfrak{V}_{n+1}\, dw_n - \mathfrak{V}_n\, dw_{n+1}) = \text{const.},$$

pour l'intégrale $n^{\text{ième}}$ restante des équations (22 *bis*), pourvu que $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{V}_n$, et $\mathfrak{V}_{n+1}$ aient les valeurs données dans les équations (18), (20) et (21), et que $\mathfrak{M}$ soit une expression quelconque qui satisfasse à l'équation (22).

Or, en supposant

$$w_n = x_i, \quad w_{n+1} = x,$$

d'où il suit

$$\begin{aligned} \frac{dw_n}{dx_r} &= 0 \quad \text{pour} \quad r >< i \quad \text{et} \quad \frac{dw_n}{dx_i} = 1, \\ \frac{dw_{n+1}}{dx_r} &= 0 \quad \text{pour} \quad r > 0 \quad \text{et} \quad \frac{dw_{n+1}}{dx} = 1, \end{aligned}$$

on tirera des équations (20), (21) et (18)

$$\begin{aligned} \mathfrak{V}_n &= \frac{F_\varphi^{(x_i)}\left(\psi - \frac{d\varphi}{dx}\right)}{\Delta(\varphi)}, \\ \mathfrak{V}_{n+1} &= 1, \\ \mathfrak{P} &= \pm\, \omega_{n-1}\left(\frac{dw_n}{dx_i}\right) \cdot \frac{1}{\Delta(\varphi)}. \end{aligned}$$

Le théorème I est donc pleinement démontré.

§ VI.

Dans ce qui précède, nous avons fait résulter le théorème I d'une proposition qu'a démontrée M. Jacobi dans sa *Theoria novi multiplicatoris*. Cependant, pour en faire notre théorème tout à fait indépendant, nous en donnerons ci-après une démonstration plus directe, qui ne tient nullement à cette théorie difficile et compliquée.

En effet, écrivons les équations (8) de cette manière :

$$(23)\quad\begin{cases}\left(\frac{d\varphi_1}{dx}-\psi_1\right)dx+\frac{d\varphi_1}{dx_1}dx_1+\ldots+\frac{d\varphi_1}{dx_i}dx_i+\ldots+\frac{d\varphi_1}{dx_n}dx_n=0,\\ \left(\frac{d\varphi_2}{dx}-\psi_2\right)dx+\frac{d\varphi_2}{dx_1}dx_1+\ldots+\frac{d\varphi_2}{dx_i}dx_i+\ldots+\frac{d\varphi_2}{dx_n}dx_n=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \left(\frac{d\varphi_n}{dx}-\psi_n\right)dx+\frac{d\varphi_n}{dx_1}dx_1+\ldots+\frac{d\varphi_n}{dx_i}dx_i+\ldots+\frac{d\varphi_n}{dx_n}dx_n=0:\end{cases}$$

en éliminant dx_1, $dx_2,\ldots$, dx_{i-1}, $dx_{i+1},\ldots$, dx_n. nous aurons pour la détermination de l'intégrale $n^{ième}$ restante

$$(24)\qquad \Delta(\varphi).dx_i-F_\varphi^{(x_i)}\left(\psi-\frac{d\varphi}{dx}\right)\cdot dx=0,$$

où, en vertu de l'équation (9), les variables x_1, $x_2,\ldots$, $x_{i-1},\ldots$, x_{i+1}, x_n sont à considérer comme fonctions connues de x et x_i. Or supposons que $\mathfrak{M}$ soit le facteur qui rend intégrable cette équation différentielle; pour cela il faut qu'il soit tel, que (*)

$$\frac{d_1[\mathfrak{M}.\Delta(\varphi)]}{dx}+\frac{d_1\left[\mathfrak{M}.F_\varphi^{(x_i)}\left(\psi-\frac{d\varphi}{dx}\right)\right]}{dx_i}=0.$$

(*) En supposant que u soit une fonction de x, x_1, $x_2,\ldots$, x_n et que x_1, $x_2,\ldots$, x_{i-1}, $x_{i+1},\ldots$, x_n soient elles-mêmes fonctions de x et x_i, nous désignons par

$$\frac{d_1 u}{dx}$$

la dérivée partielle de u par rapport à x, non-seulement en tant que x *explicite* entre dans u, mais aussi en tant qu'il y entre *implicite* dans x_1, $x_2,\ldots$, x_{i-1}, $x_{i+1},\ldots$, x_n.

ou, ce qui revient au même,

$$(25)\qquad \Delta(\varphi)\cdot\frac{\mathrm{d}\log\mathfrak{M}}{\mathrm{d}x}+\frac{d_1\Delta(\varphi)}{\mathrm{d}x}+\frac{d_1\mathrm{F}_{\varphi}^{(x_i)}\left(\psi-\frac{d\varphi}{\mathrm{d}x}\right)}{\mathrm{d}x_i}=0.$$

Mais en désignant par $\sum\limits_k^{(i)}$ la somme pour $k=1, 2,\ldots, i-1, i+1,\ldots, n$, c'est-à-dire, la somme depuis $k=1$ jusqu'à $k=n$, excepté pour $k=i$, on voit sans difficulté que

$$\frac{d_1\Delta(\varphi)}{\mathrm{d}x}=\frac{d\Delta(\varphi)}{\mathrm{d}x}+\sum_k^{(i)}\frac{d\Delta(\varphi)}{\mathrm{d}x_k}\cdot\frac{dx_k}{\mathrm{d}x},$$

$$\frac{d_1\mathrm{F}_{\varphi}^{(x_i)}\left(\psi-\frac{d\varphi}{\mathrm{d}x}\right)}{\mathrm{d}x_i}=\frac{d\mathrm{F}_{\varphi}^{(x_i)}\left(\psi-\frac{d\varphi}{\mathrm{d}x}\right)}{\mathrm{d}x_i}+\sum_k^{(i)}\cdot\frac{d\mathrm{F}_{\varphi}^{(x_i)}\left(\psi-\frac{d\varphi}{\mathrm{d}x}\right)}{\mathrm{d}x_k}\cdot\frac{dx_k}{\mathrm{d}x_i},$$

ce qui, substitué dans l'équation (25), donnera

$$(26)\quad\left\{\begin{aligned}&\Delta(\varphi)\cdot\frac{\mathrm{d}\log\mathfrak{M}}{\mathrm{d}x}+\frac{d\Delta(\varphi)}{\mathrm{d}x}+\frac{d.\mathrm{F}_{\varphi}^{(x_i)}\left(\psi-\frac{d\varphi}{\mathrm{d}x}\right)}{\mathrm{d}x_i}\\&\qquad+\sum_k^{(i)}\cdot\frac{d\Delta(\varphi)}{\mathrm{d}x_k}\cdot\frac{dx_k}{\mathrm{d}x}+\sum_k^{(i)}\cdot\frac{d\ \mathrm{F}_{\varphi}^{(x_i)}\left(\psi-\frac{d\varphi}{\mathrm{d}x}\right)}{\mathrm{d}x_k}\cdot\frac{dx_k}{\mathrm{d}x_i}=0.\end{aligned}\right.$$

Au moyen des relations (9) il vient

$$\frac{dw_1}{\mathrm{d}x_1}\mathrm{d}x_1+\ldots+\frac{dw_1}{\mathrm{d}x_{i-1}}\mathrm{d}x_{i-1}+\frac{dw_1}{\mathrm{d}x_{i+1}}\mathrm{d}x_{i+1}+\ldots+\frac{dw_1}{\mathrm{d}x_n}\cdot\mathrm{d}x_n=-\left(\frac{dw_1}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x+\frac{dw_1}{\mathrm{d}x_i}\,\mathrm{d}x_i\right),$$

$$\frac{dw_2}{\mathrm{d}x_1}\mathrm{d}x_1+\ldots+\frac{dw_2}{\mathrm{d}x_{i-1}}\mathrm{d}x_{i-1}+\frac{dw_2}{\mathrm{d}x_{i+1}}\mathrm{d}x_{i+1}+\ldots+\frac{dw_2}{\mathrm{d}x_n}\cdot\mathrm{d}x_n=-\left(\frac{dw_2}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x+\frac{dw_2}{\mathrm{d}x_i}\,\mathrm{d}x_i\right),$$

. . . .

$$\frac{dw_{n-1}}{\mathrm{d}x_1}\mathrm{d}x_1+\ldots+\frac{dw_{n-1}}{\mathrm{d}x_{i-1}}\mathrm{d}x_{i-1}+\frac{dw_{n-1}}{\mathrm{d}x_{i+1}}\mathrm{d}x_{i+1}+\ldots+\frac{dw_{n-1}}{\mathrm{d}x_n}\cdot\mathrm{d}x_n=-\left(\frac{dw_{n-1}}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+\frac{dw_{n-1}}{\mathrm{d}x_i}\mathrm{d}x_i\right),$$

d'ou, en faisant, pour abréger,

$$(27)\qquad a=\begin{vmatrix}\frac{dw_1}{\mathrm{d}x_1},\ldots, & \frac{dw_1}{\mathrm{d}x_{i-1}}, & \frac{dw_1}{\mathrm{d}x_{i+1}},\ldots, & \frac{dw_1}{\mathrm{d}x_n}\\ \frac{dw_2}{\mathrm{d}x_1},\ldots, & \frac{dw_2}{\mathrm{d}x_{i-1}}, & \frac{dw_2}{\mathrm{d}x_{i+1}},\ldots, & \frac{dw_2}{\mathrm{d}x_n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{dw_{n-1}}{\mathrm{d}x_1},\ldots, & \frac{dw_{n-1}}{\mathrm{d}x_{i-1}}, & \frac{dw_{n-1}}{\mathrm{d}x_{i+1}},\ldots & \frac{dw_{n-1}}{\mathrm{d}x_{i+1}}\end{vmatrix}$$

$$(28)\quad \mathcal{A}_k(i)=\begin{vmatrix}\frac{dw_1}{\mathrm{d}x_1},\ldots, & \frac{dw_1}{\mathrm{d}x_{i-1}}, & \frac{dw_1}{\mathrm{d}x_{i+1}},\ldots, & \frac{dw_1}{\mathrm{d}x_{k-1}}, & \frac{dw_1}{\mathrm{d}x}, & \frac{dw_1}{\mathrm{d}x_{k+1}},\ldots, & \frac{dw_1}{\mathrm{d}x_n}\\ \frac{dw_2}{\mathrm{d}x_1},\ldots, & \frac{dw_2}{\mathrm{d}x_{i-1}}, & \frac{dw_2}{\mathrm{d}x_{i+1}},\ldots, & \frac{dw_2}{\mathrm{d}x_{k-1}}, & \frac{dw_2}{\mathrm{d}x}, & \frac{dw_2}{\mathrm{d}x_{k+1}},\ldots, & \frac{dw_2}{\mathrm{d}x_n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{dw_{n-1}}{\mathrm{d}x_1},\ldots, & \frac{dw_{n-1}}{\mathrm{d}x_{i-1}}, & \frac{dw_{n-1}}{\mathrm{d}x_{i+1}},\ldots & \frac{dw_{n-1}}{\mathrm{d}x_{k-1}}, & \frac{dw_{n-1}}{\mathrm{d}x}, & \frac{dw_{n-1}}{\mathrm{d}x_{k+1}},\ldots & \frac{dw_{n-1}}{\mathrm{d}x_n}\end{vmatrix}$$

$$\mathcal{A}'_k(i)=\begin{vmatrix}\frac{dw_1}{\mathrm{d}x_1},\ldots, & \frac{dw_1}{\mathrm{d}x_{i-1}}; & \frac{dw_1}{\mathrm{d}x_{i+1}},\ldots, & \frac{dw_1}{\mathrm{d}x_{k-1}}, & \frac{dw_1}{\mathrm{d}x_i}, & \frac{dw_1}{\mathrm{d}x_{k+1}},\ldots, & \frac{dw_1}{\mathrm{d}x_n}\\ \frac{dw_2}{\mathrm{d}x_1},\ldots, & \frac{dw_2}{\mathrm{d}x_{i-1}}, & \frac{dw_2}{\mathrm{d}x_{i+1}},\ldots, & \frac{dw_2}{\mathrm{d}x_{k-1}}, & \frac{dw_2}{\mathrm{d}x_i}, & \frac{dw_2}{\mathrm{d}x_{k+1}},\ldots, & \frac{dw_2}{\mathrm{d}x_n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{dw_{n-1}}{\mathrm{d}x_1},\ldots, & \frac{dw_{n-1}}{\mathrm{d}x_{i-1}}, & \frac{dw_{n-1}}{\mathrm{d}x_{i+1}},\ldots, & \frac{dw_{n-1}}{\mathrm{d}x_{k-1}}, & \frac{dw_{n-1}}{\mathrm{d}x_i}, & \frac{dw_{n-1}}{\mathrm{d}x_{k+1}},\ldots, & \frac{dw_{n-1}}{\mathrm{d}x_n}\end{vmatrix}$$

il résultera

$$(29)\qquad a\,\mathrm{d}x_k = -\mathcal{A}_k(i).\mathrm{d}x - \mathcal{A}'_k(i).\mathrm{d}x_i,$$

et partant

$$a\cdot\frac{dx_k}{\mathrm{d}x} = -\mathcal{A}_k(i),$$

$$a\cdot\frac{dx_k}{\mathrm{d}x_i} = -\mathcal{A}'_k(i),$$

ce qui, substitué dans l'équation (26), donnera

$$(30)\left\{\begin{aligned}&a.\Delta(\varphi)\cdot\frac{\mathrm{d}\log\mathcal{M}}{\mathrm{d}x}+a\cdot\frac{d\Delta(\varphi)}{\mathrm{d}x}+a\cdot\frac{d.\mathrm{F}_\varphi^{(x_i)}\left(\psi-\frac{d\varphi}{\mathrm{d}x}\right)}{\mathrm{d}x_i}\\ &\qquad -\sum_k^{(i)}\left[\mathcal{A}_k(i)\cdot\frac{d\Delta(\varphi)}{\mathrm{d}x_k}+\mathcal{A}'_k(i)\cdot\frac{d.\mathrm{F}_\varphi^{(x_i)}\left(\psi-\frac{d\varphi}{\mathrm{d}x}\right)}{\mathrm{d}x_k}\right]=0.\end{aligned}\right.$$

Substituons dans l'équation (29) les valeurs de $\mathrm{d}x_k$ et $\mathrm{d}x_i$ tirées des formules (23) et (24), nous aurons l'équation

$$a.\mathrm{F}_{\varphi}^{(x_k)}\left(\psi-\frac{d\varphi}{\mathrm{d}x}\right)=-\Delta(\varphi)\,\mathcal{A}_k(i)-\mathrm{F}_{\varphi}^{(x_i)}\left(\psi-\frac{d\varphi}{\mathrm{d}x}\right)\cdot\mathcal{A}'_k(i),$$

qui, différentiée par rapport à x_k, donnera

$$(31)\quad\left\{\begin{aligned}&\mathcal{A}_k(i)\cdot\frac{d\Delta(\varphi)}{\mathrm{d}x_k}+\mathcal{A}'_k(i)\cdot\frac{d.\mathrm{F}_{\varphi}^{(x_i)}\left(\psi-\frac{d\varphi}{\mathrm{d}x}\right)}{\mathrm{d}x_k}\\&=-\Delta(\varphi)\cdot\frac{d.\mathcal{A}_k(i)}{\mathrm{d}x_k}-\mathrm{F}_{\varphi}^{(x_i)}\left(\psi-\frac{d\varphi}{\mathrm{d}x}\right)\cdot\frac{d.\mathcal{A}'_k(i)}{\mathrm{d}x_k}\\&\quad-\mathrm{F}_{\varphi}^{(x_k)}\left(\psi-\frac{d\varphi}{\mathrm{d}x}\right)\cdot\frac{da}{\mathrm{d}x_k}-a\cdot\frac{d.\mathrm{F}_{\varphi}^{(x_k)}\left(\psi-\frac{d\varphi}{\mathrm{d}x}\right)}{\mathrm{d}x_k}.\end{aligned}\right.$$

De plus, en observant que

$$\begin{aligned}\sum_k^{(i)}.\mathrm{F}_{\varphi}^{(x_k)}\left(\psi-\frac{d\varphi}{\mathrm{d}x}\right)\cdot\frac{da}{\mathrm{d}x_k}\mathrm{d}x&=\Delta(\varphi).\sum_k^{(i)}\frac{da}{\mathrm{d}x_k}\cdot\mathrm{d}x_k\\&=\Delta(\varphi).a.\mathrm{d}\log a-\Delta(\varphi)\cdot\frac{da}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x-\Delta(\varphi)\cdot\frac{da}{\mathrm{d}x_i}\mathrm{d}x_i\\&=\Delta(\varphi).a.\mathrm{d}\log a-\Delta(\varphi)\cdot\frac{da}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\\&\qquad-\mathrm{F}_{\varphi}^{(x_i)}\left(\psi-\frac{d\varphi}{\mathrm{d}x}\right)\cdot\frac{da}{\mathrm{d}x_i}\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

il résultera des formules (30) et (31)

$$\begin{aligned}&a.\Delta(\varphi)\cdot\frac{\mathrm{d}\log(a\mathfrak{N})}{\mathrm{d}x}+a.\sum_{1}^{n}{}_k\frac{d.\mathrm{F}_{\varphi}^{(x_k)}\left(\psi-\frac{d\varphi}{\mathrm{d}x}\right)}{\mathrm{d}x_k}+a\cdot\frac{d\Delta(\varphi)}{\mathrm{d}x}\\&-\Delta(\varphi)\left[\frac{da}{\mathrm{d}x}-\sum_k^{(i)}\frac{d\mathcal{A}_k(i)}{\mathrm{d}x_k}\right]-\mathrm{F}_{\varphi}^{(x_i)}\left(\psi-\frac{d\varphi}{\mathrm{d}x}\right)\left[\frac{da}{\mathrm{d}x_i}-\sum_k^{(i)}\frac{d\mathcal{A}'_k(i)}{\mathrm{d}x_k}\right]=0,\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$(32)\left\{\begin{aligned} & a.\Delta(\varphi)\cdot\frac{\mathrm{d}\log(a\,\mathfrak{M})}{\mathrm{d}x}+a\sum_{1}^{n}{}_{k}\cdot\frac{d.\mathrm{F}_{\varphi}^{(x_k)}(\psi)}{\mathrm{d}x_k}+a\left[\frac{d\Delta(\varphi)}{\mathrm{d}x}-\sum_{1}^{n}{}_{k}\frac{d.\mathrm{F}_{\varphi}^{(x_k)}\left(\frac{d\varphi}{\mathrm{d}x}\right)}{\mathrm{d}x_k}\right]\\ & \qquad -\Delta(\varphi)\cdot\left[\frac{da}{\mathrm{d}x}-\sum^{(i)}{}_{k}\cdot\frac{d.\mathfrak{A}_k(i)}{\mathrm{d}x_k}\right]\\ & \qquad -\mathrm{F}_{\varphi}^{(x_i)}\left(\psi-\frac{d\varphi}{\mathrm{d}x}\right)\left[\frac{da}{\mathrm{d}x_i}-\sum^{(i)}{}_{k}\frac{d.\mathfrak{A}'_k(i)}{\mathrm{d}x_k}\right]=0, \end{aligned}\right.$$

à cause de

$$\mathrm{F}_{\varphi}^{(x_k)}\left(\psi-\frac{d\varphi}{\mathrm{d}x}\right)=\mathrm{F}_{\varphi}^{(x_k)}(\psi)-\mathrm{F}_{\varphi}^{(x_k)}\left(\frac{d\varphi}{\mathrm{d}x}\right).$$

Maintenant soit

$$(33)\qquad \mathfrak{B}_k=\begin{vmatrix} \frac{d\varphi_1}{\mathrm{d}x}, & \frac{d\varphi_1}{\mathrm{d}x_1},\ldots, & \frac{d\varphi_1}{\mathrm{d}x_{k-1}}, & \frac{d\varphi_1}{\mathrm{d}x_{k+1}},\ldots, & \frac{d\varphi_1}{\mathrm{d}x_n}\\ \frac{d\varphi_2}{\mathrm{d}x}, & \frac{d\varphi_2}{\mathrm{d}x_1},\ldots, & \frac{d\varphi_2}{\mathrm{d}x_{k-1}}, & \frac{d\varphi_2}{\mathrm{d}x_{k+1}},\ldots, & \frac{d\varphi_2}{\mathrm{d}x_n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \frac{d\varphi_n}{\mathrm{d}x}, & \frac{d\varphi_n}{\mathrm{d}x_1},\ldots, & \frac{d\varphi_n}{\mathrm{d}x_{k-1}}, & \frac{d\varphi_n}{\mathrm{d}x_{k+1}},\ldots, & \frac{d\varphi_n}{\mathrm{d}x_n} \end{vmatrix}.$$

alors il suit du Lemme II que

$$\sum_{0}^{n}{}_{k}(-1)^k\frac{d\mathfrak{B}_k}{\mathrm{d}x_k}=\frac{d\mathfrak{B}_0}{\mathrm{d}x}+\sum_{1}^{n}{}_{k}(-1)^k\frac{d\mathfrak{B}_k}{\mathrm{d}x_k}=0.$$

Mais, eu égard aux notations (3) et (4), on aura

$$\frac{d\mathfrak{B}_0}{\mathrm{d}x}=\frac{d\Delta(\varphi)}{\mathrm{d}x},$$

et pour $k>0$,

$$\frac{d\mathfrak{B}_k}{\mathrm{d}x_k}=-(-1)^k\,\frac{d.\mathrm{F}_{\varphi}^{(x_k)}\left(\frac{d\varphi}{\mathrm{d}x}\right)}{\mathrm{d}x_k}.$$

Donc

$$(34)\qquad \frac{d\,\Delta(\varphi)}{\mathrm{d}x} - \sum_{1}^{n}{}_k \frac{d\,.\,\mathrm{F}_{\varphi}^{(x_k)}\left(\frac{d\varphi}{\mathrm{d}x}\right)}{\mathrm{d}x_k} = 0.$$

Pareillement, si l'on pose

$$\mathfrak{I}_k(w_n) = \begin{vmatrix} \frac{dw_1}{\mathrm{d}x}, & \frac{dw_1}{\mathrm{d}x_1}, \ldots, & \frac{dw_1}{\mathrm{d}x_{k-1}}, & \frac{dw_1}{\mathrm{d}x_{k+1}}, \ldots, & \frac{dw_1}{\mathrm{d}x_n} \\ \frac{dw_2}{\mathrm{d}x}, & \frac{dw_2}{\mathrm{d}x_1}, \ldots, & \frac{dw_2}{\mathrm{d}x_{k-1}}, & \frac{dw_2}{\mathrm{d}x_{k+1}}, \ldots, & \frac{dw_2}{\mathrm{d}x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{dw_n}{\mathrm{d}x}, & \frac{dw_n}{\mathrm{d}x_1}, \ldots, & \frac{dw_n}{\mathrm{d}x_{k-1}}, & \frac{dw_n}{\mathrm{d}x_{k+1}}, \ldots, & \frac{dw_n}{\mathrm{d}x_n} \end{vmatrix}$$

il résultera encore du Lemme II que

$$\sum_{0}^{n}{}_k (-1)^k \cdot \frac{d\,.\,\mathfrak{I}_k(w_n)}{\mathrm{d}x_k} = \frac{d\,.\,\mathfrak{I}_0(w_n)}{\mathrm{d}x} + \sum_{1}^{n}{}_k (-1)^k \cdot \frac{d\,.\,\mathfrak{I}_k(w_n)}{\mathrm{d}x_k} = 0,$$

d'où, en observant qu'en vertu des formules (27) et (28) on a pour $w_n = x_i$,

$$\mathfrak{I}_0(x_i) = (-1)^{n+i}.a,$$
$$\mathfrak{I}_i(x_i) = 0,$$
$$\mathfrak{I}_k(x_i) = -(-1)^{n+i+k}\,\mathcal{A}_k(i),\ k \text{ étant} > 0,$$

on conclura, après la division par $(-1)^{n+i}$,

$$(35)\qquad \frac{da}{\mathrm{d}x} - \sum^{(i)}{}_k \cdot \frac{d\,.\,\mathcal{A}_k(i)}{\mathrm{d}x_k} = 0.$$

Enfin, si nous permutons ici $\mathrm{d}x$ et $\mathrm{d}x_i$, l'expression a ne subira aucune altération; mais $\mathcal{A}_k(i)$ sera changé en $\mathcal{A}'_k(i)$; la formule (35) donnera

$$(36)\qquad \frac{da}{\mathrm{d}x_i} - \sum^{(i)}{}_k \frac{d\,.\,\mathcal{A}'_k(i)}{\mathrm{d}x_k} = 0.$$

Maintenant, eu égard aux formules (34), (35) et (36) que nous venons de trouver, nous tirerons de l'équation (32)

$$\Delta(\varphi) \cdot \frac{\mathrm{d}\log(a\,\mathfrak{N})}{\mathrm{d}x} + \sum_1^n {}_k \frac{d\mathrm{F}^{(x_k)}(\psi)}{\mathrm{d}x_k} = 0,$$

c'est-à-dire en vertu du Lemme III,

$$\Delta(\varphi). \frac{\mathrm{d}\log(a\,\mathfrak{N})}{\mathrm{d}x} + \sum_1^n {}_k \mathrm{F}_\varphi^{(x_k)}\left(\frac{d\psi}{\mathrm{d}x_k}\right) = 0.$$

En faisant

$$a\,\mathfrak{N} = \mathfrak{M},$$

le facteur, qui rend l'équation (24) intégrable, sera

$$\mathfrak{N} = \frac{\mathfrak{M}}{a} = \frac{\mathfrak{M}}{\Phi_{n-1}\left(\frac{dw_n}{\mathrm{d}x_i}\right)},$$

pourvu que $\mathfrak{M}$ soit une expression quelconque, qui satisfasse à

$$\Delta(\varphi). \frac{\mathrm{d}\log\mathfrak{M}}{\mathrm{d}x} + \sum_1^n {}_k \mathrm{F}_\varphi^{(x_k)}\left(\frac{d\psi}{\mathrm{d}x_k}\right).$$

C'est ce qu'il fallait démontrer.

§ VII.

En vertu du Lemme Ier on a

$$\Phi_{n-1}\left(\frac{dw_n}{\mathrm{d}x_i}\right) \cdot \Phi_{n-1}\left(\frac{dx_i}{\mathrm{d}\alpha_n}\right) = \Phi_{n-1}\left(\frac{dw_n}{\mathrm{d}\alpha_n}\right) = 1;$$

de plus, il suit de la proposition de Jacobi que nous avons rap-

pelée ci-dessus, que (*)

$$\Delta(\varphi) . \varpi_{n-1}\left(\frac{dx_1}{d\alpha_n}\right) = F_\varphi^{(\alpha_n)}\left(\frac{d\varphi}{dx_1}\right),$$

$$F_\varphi^{(x_i)}(\nu) . \varpi_{n-1}\left(\frac{dx_i}{d\alpha_n}\right) = F_\varphi^{(x_n)}(\nu).$$

A l'aide de ces trois formules, on obtiendra sans difficulté

$$\frac{\Delta(\varphi) . dx_i - F_\varphi^{(x_i)}\left(\psi - \frac{d\varphi}{dx}\right) dx}{\varpi_{n-1}\left(\frac{dw_n}{dx_i}\right)} = F_\varphi^{(\alpha_n)}\left(\frac{d\varphi}{dx_i}\right) \cdot dx_i - F_\varphi^{(\alpha_n)}\left(\psi - \frac{d\varphi}{dx}\right) dx,$$

et l'on déduit du théorème I[er] la proposition suivante :

Théorème II. — *Soient*

$$\varphi_1, \ \varphi_2, \ldots, \ \varphi_n,$$
$$\psi_1, \ \psi_2, \ldots, \ \psi_n,$$

des fonctions de $x, x_1, x_2, \ldots, x_n$. *Considérons les équations différentielles simultanées*

$$(37) \qquad \begin{cases} d\varphi_1 = \psi_1 \, dx, \\ d\varphi_2 = \psi_2 \, dx, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ d\varphi_n = \psi_n \, dx, \end{cases}$$

et supposons qu'on en ait trouvé $n-1$ *intégrales*

$$w_1 = \alpha_1, \quad w_2 = \alpha_2, \ldots, \quad w_{n-1}, = \alpha_{n-1};$$

alors si, à l'aide de ces $n-1$ *équations, on exprime les valeurs de*

$$x_1, \ x_2, \ldots \ x_{i-1}, \ x_{i+1}, \ldots, \ x_n,$$

(*) La signification de $F_\varphi^{(\alpha_n)}$ et de $F_\varphi^{(x_r)}$ est fixée par la formule (4).

en x et x_i, l'expression

$$\mathfrak{M}\left[\mathrm{F}_\varphi^{(\alpha_n)}\left(\frac{d\varphi}{\mathrm{d}\,x_i}\right)\cdot\mathrm{d}\,x_i - \mathrm{F}_\varphi^{(\alpha_n)}\left(\psi - \frac{d\varphi}{\mathrm{d}x}\right)\cdot\mathrm{d}\,x\right]$$

sera une différentielle exacte, et l'on aura

$$\int\mathfrak{M}\left[\mathrm{F}_\varphi^{(\alpha_n)}\left(\frac{d\varphi}{\mathrm{d}\,x_i}\right)\cdot\mathrm{d}\,x_i - \mathrm{F}_\varphi^{(\alpha_n)}\left(\psi - \frac{d\varphi}{\mathrm{d}\,x}\right)\cdot\mathrm{d}\,x\right] = \text{const.}$$

pour l'intégrale n^{ieme} restante des équations (37), *pourvu que* $\mathfrak{M}$ *soit tel, qu'il satisfasse à*

$$\Delta(\varphi)\cdot\frac{\mathrm{d}\log\mathfrak{M}}{\mathrm{d}x} + \sum_1^n{}_r\,\mathrm{F}_\varphi^{(x_r)}\left(\frac{d\psi}{\mathrm{d}x_r}\right) = 0.$$

§ VIII.

Faisons dans le théorème Ier $i = 1$ et

$$x_1 = y,\quad x_2 = y',\quad x_3 = y'',\ldots,\quad x_n = y^{(n-1)},$$

où, comme à l'ordinaire,

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\quad y'' = \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2},\ldots,\quad y^{(n-1)} = \frac{\mathrm{d}^{n-1}y}{\mathrm{d}x^{n-1}};$$

en supposant

$$\begin{array}{ll}
\varphi_2 = y, & \psi_2 = y',\\
\varphi_3 = y', & \psi_3 = y'',\\
\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\\
\varphi_n = y^{(n-2)}, & \psi_n = y^{(n-1)},
\end{array}$$

le système des équations (8) se réduit à une seule équation différentielle de $n^{ième}$ ordre

$$\mathrm{d}\varphi_1 = \psi_1\,\mathrm{d}x,$$

où φ_1 et ψ_1 sont des fonctions de

$$x,\ y,\ y',\ y'',\ldots,\ y^{(n-1)}.$$

Cela posé, on voit sans difficulté que

$$\Delta(\varphi) = \begin{vmatrix} \frac{d\varphi_1}{dy}, & \frac{d\varphi_1}{dy'}, \ldots, & \frac{d\varphi_1}{dy^{(n-2)}}, & \frac{d\varphi_1}{dy^{(n-1)}} \\ 1, & 0, \ldots, & 0, & 0 \\ 0, & 1, \ldots, & 0, & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0, & 0, \ldots, & 1, & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1} \frac{d\varphi_1}{dy^{(n-1)}},$$

$$F_\varphi^{x_1}\left(\psi - \frac{d\varphi}{dx}\right) = \begin{vmatrix} \psi - \frac{d\varphi}{dx}, & \frac{d\varphi_1}{dy'}, \ldots, & \frac{d\varphi_1}{dy^{(n-2)}}, & \frac{d\varphi_1}{dy^{(n-1)}} \\ y', & 0, \ldots, & 0, & 0 \\ y'', & 1, \ldots, & 0, & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y^{(n-1)}, & 0, \ldots, & 1, & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1} \cdot y' \cdot \frac{d\varphi_1}{dy^{(n-1)}}.$$

et en observant que

$$F_\varphi^{(x_r)}\left(\frac{d\psi}{dx_r}\right) = 0 \quad \text{pour} \quad r < n,$$

$$F_\varphi^{(x_n)}\left(\frac{d\psi}{dx_n}\right) = (-1)^{n-1}\left(\frac{d\psi_1}{dy^{(n-1)}} - \frac{d\varphi_1}{dy^{(n-2)}}\right),$$

on obtiendra ce

Théorème III. — *Soient φ et ψ deux fonctions de*

$$x, \; y, \; y', \; y'', \ldots, \; y^{(n-1)},$$

et

(38) $$d\varphi = \psi \, . \, dx$$

une équation différentielle du $n^{\text{ième}}$ ordre, dont on a trouvé $n-1$ intégrales premières, savoir :

$$w_1(x, \; y, \; y' \ldots y^{(n-1)}) = \alpha_1,$$
$$w_2(x, \; y, \; y' \ldots y^{(n-1)}) = \alpha_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$w_{n-1}(x, \; y, \; y' \ldots y^{(n-1)}) = a_{n-1};$$

alors, après avoir éliminé

$$y',\ y'',\dots,\ y^{(n-1)},$$

l'expression

$$\frac{\mathfrak{M}.\dfrac{d\varphi}{dy^{(n-1)}}(dy-y'dx)}{\mathfrak{Q}_{n-1}\left(\dfrac{dw_n}{dy}\right)}$$

sera une différentielle exacte, et

$$\int\frac{\mathfrak{M}.\dfrac{d\varphi}{dy^{(n-1)}}(dy-y'dx)}{\mathfrak{Q}_{n-1}\left(\dfrac{dw_n}{dy}\right)}=\text{const.}$$

sera l'intégrale générale de l'équation (38), *pourvu que* $\mathfrak{M}$ *soit une solution quelconque de*

(39) $$\frac{d\varphi}{dy^{(n-1)}}\cdot\frac{d.\log\mathfrak{M}}{dx}+\frac{d\psi}{dy^{(n-1)}}-\frac{d\varphi}{dy^{(n-2)}}=0,$$

ou, ce qui revient au même,

$$\mathfrak{M}=e^{\int dx\left(\frac{d\varphi}{dy^{(n-2)}}-\frac{d\psi}{dy^{(n-1)}}\right):\frac{d\varphi}{dy^{(n-1)}}}.$$

Corollaire. — *Supposons que* φ *et* ψ *soient tels, que*

$$\frac{d\varphi}{dy^{(n-2)}}-\frac{d\psi}{dy^{(n-1)}}=0,$$

ce qui a toujours lieu quand $y^{(n-2)}$ *n'entre pas dans* φ *et* $y^{(n-1)}$ *n'entre pas non plus dans* ψ, *c'est-à-dire quand* φ *est une fonction de* x, y, $y',\dots,y^{(n-3)},y^{(n-1)}$ *et qu'en même temps* ψ *est une fonction de* x, y, $y',\dots$, $y^{(n-3)}$, $y^{(n-2)}$; *alors on a toujours*

$$\int\frac{d\varphi}{dy^{(n-1)}}\cdot\frac{dy-y'dy}{\mathfrak{Q}_{n-1}\left(\dfrac{dw_n}{dy}\right)}=\text{const.}$$

pour l'intégrale générale de l'équation (38), *qui, par conséquent, pourra dans ce cas être trouvée toutes les fois que* $n-1$ *intégrales premières sont connues.*

§ IX.

Supposons dans le théorème précédent que φ soit une fonction seulement de x, $y^{(n-2)}$, $y^{(n-1)}$ et que

$$\psi = y^{(n-1)}.f,$$

d'où

$$\frac{d\psi}{dy^{(n-1)}} = f + y^{(n-1)}.\frac{df}{dy^{(n-1)}},$$

f étant une fonction de x, y, y',..., $y^{(n-1)}$. Posons de plus

$$\mathfrak{M} = \frac{\mathfrak{M}_1}{y^{(n-1)}}.$$

Nous aurons par l'équation (39)

$$(40)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d\varphi}{dy^{(n-1)}}\cdot\frac{d\log\mathfrak{M}_1}{dx} - \frac{1}{y^{(n-1)}}\cdot\frac{d\varphi}{dy^{(n-1)}}\cdot\frac{dy^{(n-1)}}{dx} + f + y^{(n-1)}.\frac{df}{dy^{(n-1)}} \\ &\qquad - \frac{d\varphi}{dy^{(n-2)}} = 0. \end{aligned}\right.$$

Mais en vertu de l'équation (38) nous aurons aussi la formule

$$\frac{d\varphi}{dx} = y^{(n-1)}.f = \frac{d\varphi}{dx} + y^{(n-1)}.\frac{d\varphi}{dy^{(n-2)}} + \frac{d\varphi}{dy^{(n-1)}}\cdot\frac{dy^{(n-1)}}{dx}.$$

laquelle, combinée avec l'équation (40), donnera

$$\frac{d\varphi}{d\left(\frac{1}{y^{(n-1)}}\right)}\cdot\frac{d.\log\mathfrak{M}_1}{dy^{(n-2)}} - \frac{d\varphi}{dx} + \frac{df}{d\left(\frac{1}{y^{(n-1)}}\right)} = 0.$$

Enfin, en remettant ψ à la place de f et $\mathfrak{M}$ à celle de $\mathfrak{M}_1$, nous aurons ce

Théorème IV. — *Soient* φ *une fonction de* x, $y^{(n-2)}$, $y^{(n-1)}$, *et* ψ *une*

fonction de x, y, $y' \ldots y^{(n-1)}$, si l'on a trouvé à l'équation différentielle du $n^{\text{ième}}$ ordre

$$\mathrm{d}\varphi = y^{(n-1)} . \psi \,\mathrm{d}x \tag{41}$$

$n - 1$ intégrales premières,

$$\begin{aligned} w_1(x,\ y,\ y' \ldots y^{(n-1)}) &= \alpha_1, \\ w_2(x,\ y,\ y' \ldots y^{(n-1)}) &= \alpha_2, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ w_{n-1}(x,\ y,\ y' \ldots y^{(n-1)}) &= \alpha_{n-1}; \end{aligned}$$

après l'élimination de y', y'',..., $y^{(n-1)}$, l'expression

$$\frac{\mathfrak{M}}{y^{(n-1)}} \cdot \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}y^{(n-1)}} \cdot \frac{\mathrm{d}y - y'\,\mathrm{d}x}{\mathfrak{D}_{n-1}\left(\frac{dw_n}{\mathrm{d}y}\right)}$$

sera une différentielle exacte et

$$\int \frac{\mathfrak{M}}{y^{(n-1)}} \cdot \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}y^{(n-1)}} \cdot \frac{\mathrm{d}y - y'\,\mathrm{d}x}{\mathfrak{D}_{n-1}\left(\frac{dw_n}{\mathrm{d}y}\right)} = \text{const.}$$

sera l'intégrale générale de l'équation (41), pourvu que $\mathfrak{M}$ soit une solution quelconque de

$$\frac{d\varphi}{\mathrm{d}\left(\frac{1}{y^{(n-1)}}\right)} \cdot \frac{\mathrm{d}\log\mathfrak{M}}{\mathrm{d}y^{(n-2)}} - \frac{d\varphi}{\mathrm{d}x} + \frac{d\psi}{\mathrm{d}\left(\frac{1}{y^{(n-1)}}\right)} = 0.$$

Corollaire. — *Lorsque*

$$\frac{d\varphi}{\mathrm{d}x} - \frac{d\psi}{\mathrm{d}\left(\frac{1}{y^{(n-1)}}\right)} = 0,$$

ce qui a toujours lieu quand φ est une fonction seulement de $y^{(n-2)}$ et $y^{(n-1)}$, et qu'en même temps ψ est une fonction de x, y, $y' \ldots y^{(n-2)}$, on aura

$$\int \frac{d\varphi}{\mathrm{d}y^{(n-1)}} \cdot \frac{\mathrm{d}y - y'\,\mathrm{d}x}{y^{(n-1)} . \mathfrak{D}_{n-1}\left(\frac{dw_n}{\mathrm{d}y}\right)} = \text{const.}$$

pour l'intégrale générale de l'équation (41), *qui, par conséquent, pourra toujours dans ce cas être trouvée toutes les fois que* $n-1$ *intégrales premières sont connues.*

A cause de leur grande généralité, les théorèmes III et IV, ou principalement leurs deux corollaires, ne seront pas peut-être sans intérêt et sans importance pour la théorie de l'intégration des équations différentielles d'un ordre quelconque.

§ X.

Nous allons à présent nous occuper d'une manière plus spéciale des équations différentielles du deuxième ordre. En effet, prenons dans les deux théorèmes précédents $n = 2$, nous trouverons sans difficulté

$$\frac{d\varphi}{\mathrm{d}y^{(n-1)}} \cdot \frac{1}{\mathfrak{D}_{n-1}\left(\dfrac{dw_n}{\mathrm{d}y}\right)} = \frac{d\varphi}{\mathrm{d}y'} \cdot \frac{dy'}{\mathrm{d}\alpha_1} = \frac{d\varphi}{\mathrm{d}\alpha_1},$$

et nous aurons les deux théorèmes suivants :

Théorème V. — *Soient* φ *et* ψ *deux fonctions de* x, y *et* y', *et supposons qu'on ait trouvé à l'équation différentielle du deuxième ordre*

$$\mathrm{d}\varphi = \psi\,\mathrm{d}x, \tag{42}$$

une intégrale première

$$w_1(x, y, y') = \alpha_1;$$

après l'élimination de y', *l'expression*

$$\mathfrak{M} \cdot \frac{d\varphi}{\mathrm{d}\alpha_1}(\mathrm{d}y - y'\,\mathrm{d}x)$$

sera une différentielle exacte, et nous aurons

$$\int \mathfrak{M} \cdot \frac{d\varphi}{\mathrm{d}\alpha_1}(\mathrm{d}y - y'\,\mathrm{d}x) = \text{const.}$$

pour l'intégrale générale de l'équation (42), $\mathfrak{M}$ *étant une solution quelconque de*

$$\frac{d\varphi}{dy'}\cdot\frac{d\log\mathfrak{M}}{dx}+\frac{d\psi}{dy'}-\frac{d\varphi}{dy}=0,$$

ou, ce qui revient au même,

$$\mathfrak{M}=e^{\int dx\left(\frac{d\varphi}{dy}-\frac{d\psi}{dy'}\right):\frac{d\varphi}{dy'}}.$$

COROLLAIRE. — *Lorsque*

$$\frac{d\varphi}{dy}-\frac{d\psi}{dy'}=0,$$

ce qui a toujours lieu quand φ *est une fonction de* x *et* y', *et qu'en même temps* ψ *est une fonction de* x *et* y, *l'expression*

$$\frac{d\varphi}{d\alpha_1}(dy-y'dx)$$

sera une différentielle exacte, et nous aurons

$$\int\frac{d\varphi}{d\alpha_1}(dy-y'dx)=\text{const.}$$

pour l'intégrale générale de l'équation (42), *qui dans ce cas sera toujours réduite aux quadratures.*

THÉORÈME VI. — *Soient* φ *et* ψ *deux fonctions de* x, y *et* y', *et supposons qu'on ait trouvé à l'équation différentielle du deuxième ordre*

$$(43)\qquad d\varphi=y'\psi\,dx$$

une intégrale première

$$w_1(x,y,y')=\alpha_1;$$

après l'élimination de y', *l'expression*

$$\frac{\mathfrak{M}}{y'}\cdot\frac{d\varphi}{d\alpha_1}(dy-y'dx)$$

sera une différentielle exacte et nous aurons

$$\int \frac{\mathfrak{M}}{y'} \cdot \frac{d\varphi}{d\alpha_1}(dy - y'\,dx) = \text{const.}$$

pour l'intégrale générale de l'équation (43), $\mathfrak{M}$ *étant une solution quelconque de*

$$\frac{d\varphi}{d\left(\frac{1}{y'}\right)} \cdot \frac{d\log\mathfrak{M}}{dy} + \frac{d\varphi}{dx} - \frac{d\psi}{d\left(\frac{1}{y'}\right)} = 0.$$

COROLLAIRE. — *Lorsque*

$$\frac{d\varphi}{dx} - \frac{d\psi}{d\left(\frac{1}{y'}\right)} = 0,$$

ce qui a toujours lieu quand φ *est une fonction de* y *et* y', *et qu'en même temps* ψ *est une fonction de* x *et* y, *l'expression*

$$\frac{1}{y'} \cdot \frac{d\varphi}{d\alpha_1}(dy - y'\,dx)$$

sera une différentielle exacte, et nous aurons

$$\int \frac{1}{y'} \cdot \frac{d\varphi}{d\alpha_1}(dy - y'\,dx) = \text{const.}$$

pour l'intégrale générale de l'équation (43), *qui pourra toujours dans ce cas être trouvée par des quadratures.*

Nous donnerons ci-après quelques applications des théorèmes V et VI, que nous venons de proposer.

§ XI.

EXEMPLE 1er.

Trouver la courbe dont le rayon de courbure est une fonction quelconque du rayon vecteur.

La solution de ce problème conduit à cette équation différentielle

$$\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} = \mathfrak{F}(x^2+y^2) = \frac{1}{2f(x^2+y^2)},$$

ou, ce qui revient au même,

$$(44) \qquad \frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = 2.f(x^2+y^2).$$

Pour en trouver l'intégrale générale, nous observons en premier lieu que la formule (44) pourra être présentée sous cette forme,

$$-\frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}\right)}{\mathrm{d}x} = 2.y'.f(x^2+y^2),$$

d'où l'on voit facilement qu'en faisant l'application du théorème VI on aura ici

$$(45) \qquad \varphi = -\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}, \quad \text{et} \quad \psi = 2.f(x^2+y^2),$$

et partant

$$\frac{d\varphi}{\mathrm{d}x} - \frac{d\psi}{\mathrm{d}\left(\frac{1}{y'}\right)} = 0.$$

Ainsi, tout est réduit à trouver une intégrale première de l'équation (44). Pour cela, multiplions la formule (44) par $x+yy'$; d'où résultera

$$\frac{(x+yy')\,\mathrm{d}y'}{\sqrt{(1+y'^2)^3}} = f(x^2+y^2).\mathrm{d}(x^2+y^2),$$

et en intégrant

$$(46) \qquad \frac{xy'-y}{\sqrt{1+y'^2}} = f_1(x^2+y^2)+\alpha_1,$$

α_1 étant la constante arbitraire, et

$$f_1(z) = \int f(z) \,.\, dz.$$

Or les formules (45) et (46) donnent

$$\frac{d\varphi}{d\alpha_1} = \frac{d\varphi}{dy'} \cdot \frac{dy'}{d\alpha_1} = \frac{y'}{x + yy'}.$$

De là, en vertu du corollaire au théorème VI, il suit que

$$(47) \qquad \int \frac{dy - y'\,dx}{x + yy'} = \text{const.}$$

sera l'intégrale cherchée de la formule (44).

Pour effectuer l'intégration dans l'équation (47), il ne faut qu'y substituer la valeur de y', tirée de la formule (46), savoir :

$$(48) \qquad y' = \frac{xy \pm f_2 . p}{x^2 - f_2^2},$$

en écrivant f_2 au lieu de

$$f_1(x^2 + y^2) + \alpha_1,$$

et en posant, pour abréger,

$$(49) \qquad p = \sqrt{x^2 + y^2 - f_2^2}.$$

En observant que les formules (48) et (49) donnent

$$x + yy' = \frac{p(px \pm f_2 . y)}{x^2 - f_2^2},$$

nous aurons pour l'intégrale générale

$$\int \frac{(x^2 - f_2^2)\,dy - (xy \pm f_2 . p)\,dx}{p(px \pm f_2 . y)} = \text{const.}$$

Multiplions ici le numérateur et le dénominateur par

$$px \mp f_2 . y,$$

nous aurons, en supprimant le facteur $x^2 - f_2^2$,

$$\int \frac{(px \mp f_2 y)\,\mathrm{d}y - (py \pm f_2 x)\,.\,\mathrm{d}x}{p\,(x^2 + y^2)} = \text{const.},$$

ou, ce qui revient au même,

$$2\int \frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{x^2 + y^2} \pm \int \frac{f_2}{\sqrt{x^2 + y^2 - f_2^2}} \cdot \frac{\mathrm{d}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = \text{const.}$$

Donc l'intégrale générale de la formule (44) sera

$$2 \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x} \pm \mathrm{F}(x^2 + y^2) = \alpha_2,$$

en posant, pour abréger,

$$\int \frac{[f_1(z) + \alpha_1]\,\mathrm{d}z}{z\,.\sqrt{z - [f_1(z) + \alpha_1]^2}} = \mathrm{F}(z),$$

α_1 et α_2 étant deux constantes arbitraires.

§ XII.

EXEMPLE II.

Trouver l'intégrale générale de l'équation différentielle

(50) $$\frac{yy''}{ry'^2} = \frac{c + (y')^{\frac{1}{r} - 1} \,.\, \mathfrak{F}(z)}{c + my^{1-r}},$$

où

(51) $$z = \frac{ax + ny^{1-r}}{c + my^{1-r}},$$

a, c, m, n et r étant des constantes quelconques.

Nous observons en premier lieu que la formule (50), multipliée

par

$$\frac{(r-1).(y')^{2-\frac{1}{r}}y^{-r}}{c+my^{1-r}}.$$

peut être présentée sous cette forme

$$\frac{\mathrm{d}.\left(\frac{(y')^{1-\frac{1}{r}}}{m+cy^{r-1}}\right)}{\mathrm{d}x}=y'\cdot\frac{(r-1).y^{-r}}{(c+my^{1-r})^2}\cdot\mathfrak{F}(z),$$

d'où, en appliquant le théorème VI, nous aurons

$$(52)\qquad \varphi=\frac{(y')^{1-\frac{1}{r}}}{m+cy^{r-1}}\quad \text{et}\quad \psi=\frac{(r-1)y^{-r}}{(c+my^{1-r})^2}\cdot\mathfrak{F}(z),$$

et partant

$$\frac{d\varphi}{\mathrm{d}x}-\frac{d\psi}{\mathrm{d}\left(\frac{1}{y'}\right)}=0.$$

Par conséquent, il suit du corollaire au théorème VI qu'ayant trouvé une intégrale première de l'équation (50), nous en déduirons l'intégrale générale par de simples quadratures. En effet, différentions la formule (51), d'où nous aurons

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{a(c+my^{1-r})+(1-r)y^{-r}.y'.(cn-amx)}{(c+my^{1-r})^2}=\mathrm{B},$$

et écrivons la formule (50) de cette manière

$$(y')^{-\frac{1}{r}}\cdot\left[\frac{yy''}{ry'}(c+my^{1-r})-cy'\right]=\mathfrak{F}(z);$$

cette équation, multipliée par

$$\mathrm{B}\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}z,$$

donnera

$$(53)\qquad \mathrm{B}.(y')^{-\frac{1}{r}}\cdot\left[\frac{yy''}{ry'}(c+my^{1-r})-cy'\right]\mathrm{d}x=\mathfrak{F}(z)\,\mathrm{d}z.$$

Posons de plus, pour abréger,

$$\mathfrak{L} = \frac{y^{1-r}.y'(cn - amx) + ay(c + my^{1-r})}{(y')^{\frac{1}{r}}.(c + my^{1-r})};$$

en différentiant $\mathfrak{L}$, nous aurons

$$\frac{d\mathfrak{L}}{dx} = B.(y')^{-\frac{1}{r}}\left[cy' - \frac{yy''}{ry'}(c + my^{1-r})\right],$$

d'où, en vertu de l'équation (53), il suit

$$(54) \qquad d\mathfrak{L} = -\mathfrak{F}(z)\,dz.$$

En faisant donc

$$\int \mathfrak{F}(z)\,dz = -F(z),$$

nous aurons par l'intégration de l'équation (54), en restituant la valeur de $\mathfrak{L}$,

$$(55) \qquad \frac{y^{1-r}.y'(cn - amx) + ay(c + my^{1-r})}{(y')^{\frac{1}{r}}.(c + my^{1-r})} = F(z) + \alpha_1,$$

ce qui est l'intégrale première cherchée de l'équation (50).

Cela posé, le corollaire du théorème VI nous donnera pour l'intégrale générale de l'équation (50)

$$\int \frac{1}{y'}\cdot\frac{d\varphi}{d\alpha_1}(dy - y'\,dx) = \alpha_2,$$

c'est-à-dire

$$(56) \qquad u = \int \frac{dy - y'\,dx}{ay^r(c + my^{1-r}) + (1-r).y'(cn - amx)} = \alpha_2,$$

parce qu'en vertu des formules (52) et (55) nous aurons

$$\frac{d\varphi}{d\alpha_1} = \frac{d\varphi}{dy'}\cdot\frac{dy'}{d\alpha_1} = \frac{(1-r).y'}{ay^r(c + my^{1-r}) + (1-r)y'(cn - amx)}.$$

Pour effectuer l'intégration dans l'équation (56), posons

$$(57)\qquad \varpi = \log[(c + my^{1-r})(cn - amx)],$$

d'où nous aurons cette formule

$$\varpi + \alpha_2 = u + \log[(c + my^{1-r})(cn - amx)],$$

qui différentiée donnera

$$\frac{du}{dx} = \frac{d\varpi}{dx} + \frac{m[a(c + my^{1-r}) - (1 - r)(cn - amx).y^{-r}.y']}{(c + my^{1-r}).(cn - amx)},$$

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{du}{dx} = \frac{d\varpi}{dx} + \frac{m[a(c + my^{1-r}) + (1 - r)(cn - amx).y^{-r}.y']}{(c + my^{1-r}).(cn - amx)}$$
$$\times \frac{a(c + my^{1-r}) - (1 - r)(cn - amx).y^{-r}.y'}{a(c + my^{1-r}) + (1 - r)(cn - amx).y^{-r}.y'},$$

c'est-à-dire

$$(58)\qquad du = d\varpi - \frac{d\sigma}{\sigma}\cdot\frac{a - (1 - r).\sigma.y^{-r}.y'}{a + (1 - r).\sigma.y^{-r}.y'},$$

en posant, pour abréger,

$$(59)\qquad \sigma = \frac{cn - amx}{c + my^{1-r}}.$$

Mais l'intégrale première (55) peut être présentée sous cette forme

$$a + y^{-r}.y'.\sigma = (y^{-r}.y')^{\frac{1}{r}}\cdot\left[F\left(\frac{n - \sigma}{m}\right) + \alpha_1\right],$$

laquelle formule, résolue par rapport à $y^{-r}.y'$, donnera

$$y^{-r}.y' = \varphi(\sigma, \alpha_1),$$

ce qui, substitué dans la formule (58), nous fournira

$$du = d\varpi + \frac{d\sigma}{\sigma} - 2a.\frac{1}{a + (1 - r).\sigma.\varphi(\sigma, \alpha_1)}\cdot\frac{d\sigma}{\sigma}.$$

En intégrant nous aurons enfin, à l'aide des formules (56) et (57), l'intégrale générale de l'équation (50)

$$\log(cn - amx) - a.\mathrm{F}_1\left(\frac{cn - amx}{c + my^{1-r}}, \alpha_1\right) = \alpha_2,$$

en posant, pour abréger,

$$\mathrm{F}_1(\sigma.\alpha_1) = \int \frac{1}{a + (1-r).\sigma.\varphi(\sigma, \alpha_1)} \cdot \frac{d\sigma}{\sigma},$$

α_1 et α_2 étant deux constantes arbitraires.

§ XIII.

EXEMPLE III.

Trouver l'intégrale générale de l'équation différentielle

(60) $$\frac{2yy''}{ry'^2} = 1 + \frac{ax + b + cz}{\sqrt{(ax+b)^2 + 2cz(ax+m) + c^2z^2}},$$

où $z = y^{1-r}$ et a, b, c, m et r sont des constantes quelconques.

Faisons, pour abréger,

$$\mathrm{R} + ax + b - cz = \sqrt{(ax+b)^2 + 2cz(ax+m) + c^2z^2},$$

d'où nous aurons sans difficulté

(61) $$(\mathrm{R} - 2cz)(\mathrm{R} + 2ax + 2b) = 2c(m-b).z,$$

et en différentiant, après avoir pris les logarithmes,

$$\frac{\frac{d\mathrm{R}}{dx} - 2c(1-r).y^{-r}.y'}{\mathrm{R} - 2cz} + \frac{\frac{d\mathrm{R}}{dx} + 2a}{\mathrm{R} + 2ax + 2b} = \frac{(1-r)y'}{y},$$

c'est-à-dire, après quelques réductions,

$$\frac{d\mathrm{R}}{dx} = (1-r).\frac{y'}{y}.\mathrm{R} - \frac{\mathrm{R} - 2cz}{\mathrm{R} + 2ax + 2b}\left(\frac{d\mathrm{R}}{dx} + 2a\right),$$

ou, ce qui revient au même,

$$(62)\qquad \left(\frac{\mathrm{d}\,\mathrm{R}}{\mathrm{d}x}+2a\right)\left(1+\frac{\mathrm{R}-2cz}{\mathrm{R}+2ax+2b}\right)=\frac{2ay+(1-r)y'\mathrm{R}}{y}.$$

Or l'équation différentielle (60) peut être écrite de cette manière

$$(63)\qquad \frac{2yy''}{ry'^2}=1+\frac{ax+b+cz}{\mathrm{R}+ax+b-cz}=\frac{\mathrm{R}+2ax+2b}{\mathrm{R}+ax+b-cz},$$

d'où

$$\frac{ry'^2}{yy''}=1+\frac{\mathrm{R}-2cz}{\mathrm{R}+2ax+2b},$$

ce qui, substitué dans l'équation (62), donnera

$$\frac{y'\left(2a+\dfrac{\mathrm{d}\,\mathrm{R}}{\mathrm{d}x}\right)+\mathrm{R}y''}{2ay+\mathrm{R}y'}=\frac{y''}{ry'}.$$

En intégrant, nous aurons

$$(64)\qquad 2ay+\mathrm{R}y'=\alpha_1(y')^{\frac{1}{r}}$$

pour l'intégrale première de l'équation (60), α_1 étant une constante arbitraire.

Écrivons à présent l'équation (63), qui est la même que l'équation (60), sous cette forme

$$-\left(\frac{1}{y'}\right)'=\frac{r}{2y}\cdot\frac{\mathrm{R}+2ax+2b}{\mathrm{R}+ax+b-cz},$$

et appliquons le théorème V pour en trouver l'intégrale générale. On voit immédiatement qu'on a

$$(65)\qquad \varphi=-\frac{1}{y'}\quad \text{et}\quad \psi=\frac{r}{2y}\cdot\frac{\mathrm{R}+2ax+2b}{\mathrm{R}+ax+b-cz},$$

d'où il suit

$$\frac{d\varphi}{\mathrm{d}y}-\frac{d\psi}{\mathrm{d}y'}=0.$$

Cette relation ayant lieu, le corollaire au théorème V nous enseigne

qu'après l'élimination de y'

$$\frac{d\varphi}{d\alpha_1}(dy - y'dx)$$

est une différentielle exacte, et que

$$\int \frac{d\varphi}{d\alpha_1}(dy - y'dx) = \alpha_2$$

est l'intégrale générale de l'équation (60), α_2 étant une constante arbitraire. Mais à l'aide des formules (64) et (65) nous aurons

$$\frac{d\varphi}{d\alpha_1} = \frac{d\varphi}{dy'}\cdot\frac{dy'}{d\alpha_1} = -\frac{r.(y')^{\frac{1}{r}-1}}{2ay + (1-r)y'.R},$$

d'où

(66) $$\frac{d\varphi}{d\alpha_1}(dy - y'dx) = -\frac{r(y')^{\frac{1}{r}-1}(dy - y'dx)}{2ay + (1-r)y'.R}.$$

En même temps la formule (64), que nous pouvons écrire sous cette forme

(67) $$y'.y^{-r}.y^{r-1}.R = \alpha_1(y'.y^{-r})^{\frac{1}{r}} - 2a.$$

nous donnera $y'.y^{-r}$ exprimé en $y^{r-1}.R$, savoir

(68) $$y'.y^{-r} = \varpi(y^{r-1}.R, \alpha_1) = \varpi.$$

d'où

(69) $$(y')^{\frac{1}{r}} = y.(\varpi)^{\frac{1}{r}},$$

et partant, à l'aide de la formule (64),

(70) $$y'.R = y.\left[\alpha_1(\varpi)^{\frac{1}{r}} - 2a\right].$$

Cela posé, en vertu des formules (66), (69) et (70) que nous venons de trouver, nous aurons l'intégrale générale cherchée (après avoir sup-

primé le facteur r)

$$\int \frac{dx - \dfrac{y^{-r}}{\varpi} dy}{(1-r)\alpha_1 + 2ar.(\varpi)^{-\frac{1}{r}}} = \alpha_2.$$

ou, en vertu des méthodes connues,

$$(71)\qquad F(x, y, \alpha_1) - \int \left\{ \frac{dF}{dy} + \frac{y^{-r}}{\varpi.\left((1-r)\alpha_1 + 2ar(\varpi)^{-\frac{1}{r}}\right)} \right\} dy = \alpha_2,$$

α_1 et α_2 étant deux constantes arbitraires, et ayant posé, pour abréger,

$$(72)\qquad \int \frac{dx}{(1-r)\alpha_1 + 2ar(\varpi)^{-\frac{1}{r}}} = F(x, y, \alpha_1) = F,$$

où l'intégration, se rapportant à la seule variable x, doit être effectuée comme si y était constante.

D'ailleurs il est très-facile de démontrer que l'expression sous le signe d'intégration dans l'équation (71)

$$\frac{dF}{dy} + \frac{y^{-r}}{\varpi\left((1-r)\alpha_1 + 2ar(\varpi)^{-\frac{1}{r}}\right)} = \mathfrak{Q}$$

est une fonction de la seule variable y. En effet, différentions-la par rapport à x, nous aurons

$$\frac{d\mathfrak{Q}}{dx} = y^{-r}.\frac{d\left[\dfrac{1}{(1-r)\alpha_1\varpi + 2ar(\varpi)^{1-\frac{1}{r}}}\right]}{dx} + \frac{d^2F}{dx.dy},$$

c'est-à-dire, en vertu de l'équation (72),

$$(73)\qquad \frac{d\mathfrak{Q}}{dx} = -\frac{(1-r).\dfrac{\varpi'}{y}.\dfrac{dR}{dx}\left(\alpha_1 - 2a(\varpi)^{-\frac{1}{r}}\right) - 2ay^{r-1}.(\varpi)^{1-\frac{1}{r}}.\varpi'\left[\dfrac{dR}{dy} + (r-1).\dfrac{R}{y}\right]}{(\varpi)^2\left((1-r)\alpha_1 + 2ar(\varpi)^{-\frac{1}{r}}\right)^2}.$$

Mais des équations (69) et (70) on tirera

$$\alpha_1 - 2a(\varpi)^{-\frac{1}{r}} = \frac{y'}{y}\cdot \mathrm{R}.(\varpi)^{-\frac{1}{r}} = (y')^{1-\frac{1}{r}}.\mathrm{R},$$

$$y^{r-1}.(\varpi)^{1-\frac{1}{r}} = (y')^{1-\frac{1}{r}},$$

ce qui, substitué dans l'équation (73), donnera

$$(74)\quad \frac{d\mathfrak{Q}}{\mathrm{d}x} = -\frac{(y')^{1-\frac{1}{r}}.\varpi'.\left[(1-r).\mathrm{R}.\frac{d\mathrm{R}}{\mathrm{d}x} - 2ay.\frac{d\mathrm{R}}{\mathrm{d}y} + (1-r).2a\mathrm{R}\right]}{y.(\varpi)^2.\left((1-r)\alpha_1 + 2ar(\varpi)^{-\frac{1}{r}}\right)^2}.$$

De plus, par la différentiation partielle de l'équation (61) par rapport à x et par rapport à y, nous aurons

$$\frac{d\mathrm{R}}{\mathrm{d}x} = -\frac{a(\mathrm{R}-2cz)}{\mathrm{R}+ax+b-cz},$$

$$2y\cdot\frac{d\mathrm{R}}{\mathrm{d}y} = \frac{(1-r).\mathrm{R}(\mathrm{R}+2ax+2b)}{\mathrm{R}+ax+b-cz};$$

ce qui, substitué dans l'équation (74), en fait évanouir le second membre, de sorte que

$$\frac{d\mathfrak{Q}}{\mathrm{d}x} = 0,$$

ce qui montre que $\mathfrak{Q}$ est tout à fait indépendant de x.

§ XIV.

EXEMPLE IV.

Trouver l'intégrale générale de l'équation différentielle

$$(75)\qquad \frac{y''}{(a+2by'+cy'^2)^{\frac{3}{2}}} = 2.f(z).$$

où, pour abréger,

(76) $$z = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2ex + 2fy + g.$$

Faisons

(77) $$\begin{cases} k^2 = ac - b^2, \\ F(z) = \int f(z).dz; \end{cases}$$

et soient m et n tels, que

(78) $$\begin{cases} am + bn = e, \\ bm + cn = f; \end{cases}$$

apres avoir multiplié l'équation (75) par

$$2[(a + by')x + (b + cy')y + fy' + e]\,dx = dz,$$

nous aurons, en intégrant,

(79) $$\frac{xy' - y + my' - n}{\sqrt{a + 2by' + cy'^2}} = F(z) + \alpha_1,$$

ce qui est une intégrale première de l'équation (75), α_1 étant une constante arbitraire.

Mais la formule (75) peut aussi être présentée sous cette forme

$$\frac{d.\left(\dfrac{a + by'}{\sqrt{a + 2by' + cy'^2}}\right)}{dx} = y'.2k^2.f(z),$$

d'où il suit qu'en appliquant le théorème VI nous aurons

(80) $$\varphi = \frac{a + by'}{\sqrt{a + 2by' + cy'^2}}, \quad \psi = 2.k^2.f(z),$$

et partant

$$\frac{d\varphi}{dx} - \frac{d\psi}{d\left(\dfrac{1}{y'}\right)} = 0.$$

En observant qu'en vertu des formules (79) et (80) on a

$$\frac{d\varphi}{d\alpha_1} = \frac{d\varphi}{dy'} \cdot \frac{dy'}{d\alpha_1} = \frac{k^2 . y'}{x(a + by') + y(b + cy') + fy' + e},$$

il résultera du corollaire au théorème VI qu'en supprimant le facteur k^2 l'intégrale générale de l'équation (75) sera

$$(81) \qquad \int \frac{dy - y'\,dx}{x(a + by') + y(b + cy') + fy' + e} = \alpha_2,$$

α_2 étant une constante arbitraire.

A présent effectuons l'intégration indiquée. D'abord, attention faite aux relations (78), nous aurons

$$d.\text{arc tang}\frac{bx + cy + f}{k(x + m)} = \frac{k[(x + m)\,dy - (y + n)\,dx]}{ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2fy + 2ex + fn + em},$$

d'où, en intégrant,

$$\text{arc tang}\frac{bx + cy + f}{k(x + m)} = k.\int \frac{(x + m)\,dy - (y + n)\,dx}{ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2fy + 2ex + fn + em},$$

laquelle équation, ajoutée à l'équation (81) multipliée par k, donnera

$$\text{arc tang}\frac{bx + cy + f}{k(x + m)} + k.\int\left[\frac{dy - y'\,dx}{x(a + by') + y(b + cy') + fy' + e}\right.$$
$$\left. - \frac{(x + m)\,dy - (y + n)\,dx}{ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2fy + 2ex + fn + em}\right] = \alpha_2.$$

Réduisons ici les deux fractions sous le signe d'intégration à un même dénominateur. En posant, pour abréger,

$$(82) \qquad \text{B} = \frac{x(a + by') + y(b + cy') + fy' + e}{k(xy' - y + my' - n)},$$

nous aurons, attention faite à la formule (76),

$$(83) \qquad \text{arc tang}\frac{bx + cy + f}{k(x + m)} - \frac{1}{2}.\int \frac{dz}{z - g + fn + em} \cdot \frac{1}{\text{B}} = \alpha_2.$$

D'ailleurs la formule (82) donnera, à l'aide des relations (78),

$$B^2 + 1 = \frac{z - g + fn + em}{k^2\left(\frac{xy' - y + my' - n}{\sqrt{a + 2by' + cy'^2}}\right)^2},$$

c'est-à-dire, en vertu de la formule (79),

$$B^2 + 1 = \frac{z - g + fn + em}{k^2[F(z) + \alpha_1]^2},$$

d'où enfin il résultera

$$\frac{1}{B} = \pm \frac{k[F(z) + \alpha_1]}{\sqrt{z - g + fn + em - k^2 . [F(z) + \alpha_1]^2}}.$$

Cette valeur de $\frac{1}{B}$ étant substituée dans la formule (83), et ayant posé, pour abréger,

$$F_1(z, \alpha_1) = \int \frac{dz}{z - g + fn + em} \cdot \frac{F(z) + \alpha_1}{\sqrt{z - g + fn + em - k^2[F(z) + \alpha_1]^2}},$$

nous aurons pour l'intégrale générale de la formule (75)

$$\text{arc tang}\,\frac{bx + cy + f}{k(x + m)} \pm \frac{k}{2} \cdot F_1(ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2fy + 2ex + g, \alpha_1) = \alpha_2,$$

α_1 et α_2 étant deux constantes arbitraires, et les valeurs de k et de m étant données par les formules (77) et (78). Si k devient imaginaire, les réductions nécessaires se feront sans aucune difficulté.

§ XV.

Dans un Mémoire de M. Liouville : « Remarques sur une classe d'équations différentielles » (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. XIV, p. 225), l'illustre auteur a réussi, par des substitutions très-ingénieuses, à faire voir une propriété, auparavant incon-

nue, de l'équation du troisième ordre

$$\frac{\mathrm{d}.\varphi(z).\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}x^2}}{\mathrm{d}x} = f(z).\mathrm{F}\left(\varphi(z).\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}x^2}\right),$$

savoir, *que l'intégrale complète est toujours facile à obtenir par quadratures dès qu'on donne une intégrale première*. Or, et cette équation et celle plus générale dont l'auteur fait mention dans la fin de son Mémoire, ne sont que des cas spéciaux d'un groupe très-étendu d'équations différentielles du troisième ordre, qui jouissent toutes de la même propriété remarquable.

Quant aux équations différentielles du second ordre, qui manquent de la variable indépendante, il est connu depuis longtemps que leur intégration ne présente pas plus de difficulté que celle d'une équation du premier ordre. Nous ferons voir ici qu'il y a encore une grande classe de pareilles équations du troisième ordre (où il manque la variable indépendante) qui se distinguent par la propriété analogue, que leurs intégrales complètes sont toujours faciles à obtenir par quadratures, dès qu'on a trouvé une seule intégrale première.

En effet, considérons dans les théorèmes V et VI la variable x comme fonction de t, et faisons

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2},$$

d'où il suit

$$\sqrt{2y} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t};$$

donc, les substitutions étant effectuées, en mettant x au lieu de t, et y, y', y'' au lieu de x, x'_t, x''_t $\left(y' \text{ et } y'' \text{ désignant comme à l'ordinaire } \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \text{ et } \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right)$, on obtiendra ces deux théorèmes remarquables :

THÉORÈME VII. — *Soient φ et ψ deux fonctions quelconques de y, y', y'', et soit*

(84) $$\frac{\mathrm{d}\varphi(y, y', y'')}{\mathrm{d}x} = \psi(y, y', y'')$$

une équation différentielle du troisième ordre, dont on a trouvé l'intégrale première

$$w_1(y, y', y'') = \alpha_1$$

(α_1 *étant la constante arbitraire); alors, après l'élimination de* y'', *l'expression*

$$\mathfrak{M} . \frac{d\varphi}{d\alpha_1}(y' \, dy' - y'' \, dy)$$

deviendra une différentielle exacte, et l'intégrale seconde de l'équation (84)

$$(85) \qquad \int \mathfrak{M} . \frac{d\varphi}{d\alpha_1}(y' \, dy' - y'' \, dy) = \text{const.}$$

se réduira à des quadratures, pourvu que $\mathfrak{M}$ *soit une solution quelconque de*

$$\frac{d\varphi}{dy''} . \frac{d \log \mathfrak{M}}{dx} - \frac{d\varphi}{dy'} + \frac{d\psi}{dy''} = 0,$$

ou, ce qui revient au même, que

$$\mathfrak{M} = e^{\int dx \left(\frac{d\varphi}{dy'} - \frac{d\psi}{dy''}\right) : \frac{d\varphi}{dy''}}.$$

Corollaire. — *Dans le cas de*

$$\frac{d\varphi}{dy'} = \frac{d\psi}{dy''},$$

ce qui a toujours lieu si φ *n'est fonction que de* y *et* y'', *et qu'en même temps* ψ *ne soit fonction que de* y *et* y', *l'expression*

$$\frac{d\varphi}{d\alpha_1}(y' \, dy' - y'' \, dy)$$

deviendra toujours, après l'élimination de y'', *une différentielle exacte, et l'intégrale seconde de la formule* (84)

$$\int \frac{d\varphi}{d\alpha_1}(y' \, dy' - y'' \, dy) = \text{const.}$$

pourra toujours s'effectuer par quadratures.

Pour avoir l'intégrale complète, il suffit d'observer qu'on aura par l'équation (85)

$$F(y, y', \alpha_1) = \alpha_2,$$

ce qui donnera

$$y' = \frac{dy}{dx} = f_1(y, \alpha_1, \alpha_2),$$

d'où l'on aura enfin l'intégrale complète

$$x + \alpha_3 = \int \frac{dy}{f_1(y, \alpha_1, \alpha_2)},$$

α_1, α_2 et α_3 étant trois constantes arbitraires.

Théorème VIII. — *Soient φ et ψ deux fonctions quelconques de y, y' et y'', et soit*

(86) $$\frac{d.\varphi(y, y', y'')}{dx} = y''.\psi(y, y', y'')$$

une équation différentielle du troisième ordre dont on a trouvé l'intégrale première

$$w_1(y, y', y'') = \alpha_1$$

(α_1 étant une constante arbitraire); alors, après l'élimination de y'', l'expression

$$\frac{\mathfrak{M}}{y''} \cdot \frac{d\varphi}{d\alpha_1}(y'dy' - y''dy)$$

deviendra une différentielle exacte, et l'intégrale seconde de (86)

(87) $$\int \frac{\mathfrak{M}}{y''} \cdot \frac{d\varphi}{d\alpha_1}(y'dy' - y''dy) = \text{const.}$$

se réduira à des quadratures, pourvu que $\mathfrak{M}$ soit une solution quelconque de

$$\frac{d\varphi}{d\left(\frac{1}{y''}\right)} \cdot \frac{d\log\mathfrak{M}}{dy'} - y' \cdot \frac{d\varphi}{dy} + \frac{d\psi}{d\left(\frac{1}{y''}\right)} = 0,$$

ou, ce qui revient au même, que

$$(88)\qquad \mathfrak{M} = e^{\int \mathrm{d}y' \left[y' \cdot \frac{d\varphi}{\mathrm{d}y} - \frac{d\psi}{\mathrm{d}\left(\frac{1}{y''}\right)} \right] : \frac{d\varphi}{\mathrm{d}\left(\frac{1}{y''}\right)}}.$$

Corollaire. — *Dans le cas de*

$$y' \cdot \frac{d\varphi}{\mathrm{d}y} - \frac{d\psi}{\mathrm{d}\left(\frac{1}{y''}\right)} = 0,$$

ce qui a toujours lieu si φ n'est fonction que de y' et y'', et qu'en même temps ψ ne soit fonction que de y et y', l'expression

$$\frac{1}{y''} \cdot \frac{d\varphi}{\mathrm{d}\alpha_1} (y' \mathrm{d} y' - y'' \mathrm{d} y)$$

deviendra toujours, après l'élimination de y'', une différentielle exacte, et l'intégrale seconde de l'équation (86)

$$\int \frac{1}{y''} \cdot \frac{d\varphi}{\mathrm{d}\alpha_1} (y' \mathrm{d} y' - y'' \mathrm{d} y) = \text{const.}$$

pourra toujours s'effectuer par quadratures.

Pour avoir l'intégrale complète de la proposée, il suffit d'observer qu'on aura par l'équation (87)

$$\mathrm{F}(y, y', \alpha_1) = \alpha_2,$$

d'où l'on conclura sans difficulté

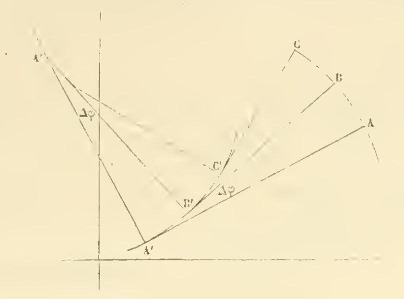
$$x + \alpha_3 = \int \frac{\mathrm{d}y}{f_1(y, \alpha_1, \alpha_2)},$$

α_1, α_2 et α_3 étant trois constantes arbitraires.

§ XVI.

Appliquons à présent le théorème VIII à la solution du problème suivant :

Trouver une courbe telle, que pour chacun de ses points le produit de l'ordonnée et de la sous-tangente, multiplié par le rayon de courbure de la développée, soit une fonction quelconque de la normale.



Solution. — Soient ABC la courbe cherchée, A′B′C′ sa développée,

$$AA' = \rho = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$$

le rayon de courbure de la courbe ABC,

$$(89)\qquad A'A'' = \rho_1 = \lim \frac{A'B'}{\Delta\varphi} = \frac{d\rho}{d\varphi}$$

le rayon de courbure de la développée A′B′C′,

$$(90)\qquad \nu = y\sqrt{1+y'^2}$$

la normale de la courbe ABC; le problème conduit à cette équation

$$(91)\qquad \frac{y^2}{y'}\cdot\rho_1 = f(\nu),$$

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{\rho_1}{\rho} = \frac{y'}{\rho\cdot y^2}\cdot f(\nu).$$

Or, en vertu de l'équation (89) on a

$$\frac{\rho_1}{\rho} = \frac{d\rho}{\rho\, d\varphi} = \frac{d\rho}{ds} = 3y' - \frac{y'''}{(y'')^2}\cdot(1+y'^2) = \frac{d\left(y + \frac{1+y'^2}{y''}\right)}{dx},$$

ce qui donnera

$$\frac{d\left(y + \frac{1+y'^2}{y''}\right)}{dx} = \frac{y'}{\rho y^2}\cdot f(v) = y''\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\cdot\frac{f(v)}{v^2},$$

ou, ce qui revient au même,

$$(92)\qquad \frac{d\left(y + \frac{1+y'^2}{y''}\right)}{dx} = y''\cdot yy'\cdot\frac{f(v)}{v^3}.$$

En multipliant cette formule par

$$y + \frac{1+y'^2}{y''} = \frac{v\,dv}{yy'y''.\,dx},$$

ce qu'on obtiendra sans difficulté de l'équation (90), on aura

$$\left(y + \frac{1+y'^2}{y''}\right)d.\left(y + \frac{1+y'^2}{y''}\right) = \frac{f(v)}{v^2}\,dv,$$

d'où, en posant, pour abréger,

$$\int\frac{f(v)}{v^2}\,dv = \frac{1}{2}F(v),$$

on aura par l'intégration

$$(93)\qquad y + \frac{1+y'^2}{y''} = \sqrt{F(v) + \alpha_1}.$$

Or, après avoir trouvé une intégrale première de l'équation (91), la forme de l'équation (92) nous porte à en chercher l'intégrale complète à l'aide du théorème VIII. Pour cela, nous observons en premier

lieu qu'on a ici

$$\varphi(y, y', y'') = y + \frac{1+y'^2}{y''} = \sqrt{F(v) + \alpha_1},$$

$$\psi(y, y', y'') = \frac{yy' . f(v)}{v^3}.$$

d'où il résulte

$$\frac{d\varphi}{d\alpha_1} = \frac{1}{2\sqrt{F(v)+\alpha_1}},$$

$$\frac{d\varphi}{dy} = 1, \quad \frac{d\varphi}{d\left(\frac{1}{y''}\right)} = 1 + y'^2, \quad \frac{d\psi}{d\left(\frac{1}{y''}\right)} = 0.$$

De plus, la formule (88) donne

$$\mathfrak{M} = \sqrt{1+y'^2};$$

donc, en vertu du théorème VIII, nous aurons l'intégrale seconde de l'équation (91)

$$(94) \qquad \int \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y''\sqrt{F(v)+\alpha_1}} (y' dy' - y'' dy) = \alpha_2,$$

où l'intégration pourra facilement s'effectuer par quadratures. En effet, à l'aide de l'équation (93) nous aurons par l'équation (94)

$$\alpha_2 = \int \frac{\sqrt{F(v)+\alpha_1} - y}{\sqrt{F(v)+\alpha_1}} \left[\frac{y' dy'}{\sqrt{1+y'^2}} - \frac{\sqrt{1+y'^2} . dy}{\sqrt{F(v)+\alpha_1} - y} \right],$$

c'est-à-dire

$$\alpha_2 = \sqrt{1+y'^2} - \int \frac{1}{\sqrt{F(v)+\alpha_1}} \cdot \left(\frac{yy' dy'}{\sqrt{1+y'^2}} + \sqrt{1+y'^2} dy \right),$$

et, en vertu de l'équation (90),

$$\alpha_2 = \frac{v}{y} - \int \frac{dv}{\sqrt{F(v)+\alpha_1}},$$

moyennant quoi, en posant, pour abréger,

$$\int \frac{dv}{\sqrt{F(v)+\alpha_1}} = \mathcal{F}_1(v, \alpha_1),$$

l'intégrale seconde de l'équation (91) prendra la forme

$$\frac{v}{y} = \mathcal{F}_1(v, \alpha_1) + \alpha_2.$$

Cette équation, étant résolue par rapport à v, nous donnera

$$v = \varpi(y, \alpha_1, \alpha_2) = \varpi,$$

d'où il vient

$$\sqrt{1+y'^2} = \frac{\varpi}{y},$$

ou

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{\varpi^2 - y^2}}{y},$$

ce qui donnera enfin pour l'intégrale complète de l'équation (91)

$$x + \alpha_3 = \int \frac{y\,dy}{\sqrt{[\varpi(y, \alpha_1, \alpha_2)]^2 - y^2}},$$

α_1, α_2 et α_3 étant trois constantes arbitraires.

§ XVII.

Soit

$$\varphi(x, y, y') = 0$$

une équation différentielle du premier ordre; elle peut toujours être considérée comme un cas spécial de

$$\varphi(x, y, y') = \alpha$$

(pour $\alpha = 0$), qui différentiée donnera

$$\frac{d\varphi}{dx} = 0$$

Or, à cause de

$$\frac{d\varphi}{d\alpha} = 1,$$

les théorèmes V et VI nous enseignent que les expressions

$$\mathfrak{M}\,(dy - y'\,dx)$$

et

$$\frac{\mathfrak{M}_1}{y'}\,(dy - y'\,dx)$$

sont des différentielles exactes, pourvu que

$$\mathfrak{M} = e^{\int dx\left(\frac{d\varphi}{dy} : \frac{d\varphi}{dy'}\right)},$$

$$\mathfrak{M} = e^{\int dy.\left[\frac{d\varphi}{dx} : \frac{d\varphi}{d\left(\frac{1}{y'}\right)}\right]}.$$

Nous aurons donc ces deux théorèmes concernant l'intégration des équations du premier ordre :

Théorème IX. — *Soit*

(95) $$\varphi(x, y, y') = 0$$

une équation différentielle du premier ordre, et soit $\mathfrak{M}$ *une fonction de* x, y *et* y' *telle que*

(96) $$\mathfrak{M} = e^{\int dx\left(\frac{d\varphi}{dy} : \frac{d\varphi}{dy'}\right)};$$

alors l'expression

(97) $$\mathfrak{M}\,(dy - y'\,dx)$$

sera une différentielle exacte, et l'élimination de y' *entre l'équation* (95) *et*

$$\int \mathfrak{M}\,(dy - y'\,dx) = \text{const.}$$

donnera l'intégrale générale de l'équation (95).

Théorème X. — *Soit*

$$\varphi(x, y, y') = 0 \tag{98}$$

une équation différentielle du premier ordre, et soit $\mathfrak{M}_1$ *une fonction de* x, y *et* y' *telle que*

$$\mathfrak{M}_1 = e^{\int dy \left[\frac{d\varphi}{dx} : \frac{d\varphi}{d\left(\frac{1}{y'}\right)}\right]}; \tag{99}$$

alors

$$\frac{\mathfrak{M}_1}{y'}(dy - y'\,dx) \tag{100}$$

sera une différentielle exacte, et l'élimination de y' *entre l'équation* (98) *et*

$$\int \frac{\mathfrak{M}_1}{y'}(dy - y'\,dx) = \text{const.}$$

donnera l'intégrale générale de l'équation (98).

§ XVIII.

On peut très-facilement vérifier ces deux théorèmes. En effet, $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{M}_1$ étant des fonctions de x, y et y', pour que les expressions (97) et (100) soient des différentielles exactes, il faut et il suffit que

$$\frac{d\mathfrak{M}}{dx} + \frac{d\mathfrak{M}}{dy'} \cdot \frac{dy'}{dx} + y'\left(\frac{d\mathfrak{M}}{dy} + \frac{d\mathfrak{M}}{dy'} \cdot \frac{dy'}{dy}\right) + \mathfrak{M} \cdot \frac{dy'}{dy} = 0 \tag{101}$$

et

$$\frac{1}{y'}\left(\frac{d\mathfrak{M}}{dx} + \frac{d\mathfrak{M}}{dy'} \cdot \frac{dy'}{dx}\right) + \mathfrak{M} \cdot \frac{d\left(\frac{1}{y'}\right)}{dx} + \frac{d\mathfrak{M}}{dy} + \frac{d\mathfrak{M}}{dy'} \cdot \frac{dy'}{dy} = 0. \tag{102}$$

Or, en observant que

$$y'' = \frac{dy'}{dx} + y' \cdot \frac{dy'}{dy}$$

et

$$\frac{d\mathfrak{M}}{\mathrm{d}x} + \frac{d\mathfrak{M}}{\mathrm{d}y}y' + \frac{d\mathfrak{M}}{\mathrm{d}y'}\cdot y'' = \frac{\mathrm{d}\mathfrak{M}}{\mathrm{d}x},$$

les formules (101) et (102) peuvent être présentées sous la forme

$$\frac{\mathrm{d}\log\mathfrak{M}}{\mathrm{d}x} + \frac{dy'}{\mathrm{d}y} = 0,$$

$$\frac{\mathrm{d}\log\mathfrak{M}}{\mathrm{d}y} + \frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{y'}\right)}{\mathrm{d}x} = 0;$$

d'ou, en remarquant que l'équation

$$\varphi(x, y, y') = 0$$

donnera

$$\frac{d\varphi}{\mathrm{d}y} + \frac{d\varphi}{\mathrm{d}y'}\cdot\frac{dy'}{\mathrm{d}y} = 0,$$

$$\frac{d\varphi}{\mathrm{d}x} + \frac{d\varphi}{\mathrm{d}\left(\frac{1}{y'}\right)}\cdot\frac{d\left(\frac{1}{y'}\right)}{\mathrm{d}x} = 0,$$

nous aurons

$$\log\mathfrak{M} = \int \mathrm{d}x\left(\frac{d\varphi}{\mathrm{d}y} : \frac{d\varphi}{\mathrm{d}y'}\right),$$

$$\log\mathfrak{M}_1 = \int \mathrm{d}y\left[\frac{d\varphi}{\mathrm{d}x} : \frac{d\varphi}{\mathrm{d}\left(\frac{1}{y'}\right)}\right],$$

ce qui revient au même que les formules (96) et (99).

§ XIX.

A présent nous allons appliquer ces deux théorèmes à l'intégration de diverses classes d'équations différentielles du premier ordre, qui me semblent mériter leur place à côté de celles qui ont déjà été l'objet des recherches des analystes.

EXEMPLE I.

PROBLÈME. — *Trouver la courbe qui divise la portion de la normale située entre les axes des coordonnées* [*] *en deux parties telles, que l'une soit fonction quelconque de l'autre.*

On verra sans difficulté que la condition donnée conduit à cette équation

$$\frac{x}{y'}\sqrt{1+(y')^2} = f\left(y\sqrt{1+(y')^2}\right), \tag{103}$$

ou, ce qui revient au même,

$$y \cdot y' \cdot \varpi(u) - x = 0, \tag{104}$$

en posant, pour abréger,

$$u = y \cdot \sqrt{1+(y')^2} \quad \text{et} \quad f(z) = z \cdot \varpi(z).$$

Pour trouver, à l'aide du théorème X, le facteur propre à l'intégration, nous observons que

$$\varphi = yy' \cdot \varpi(u) - x. \tag{105}$$

En différentiant (104) nous aurons

$$\frac{\varpi'(u) \cdot yy'^2}{\sqrt{1+(y')^2}} = \frac{1}{yy'} \cdot \frac{dx}{d \cdot \log(x+yy')} - \frac{x}{yy'},$$

d'ou, en ajoutant

$$\varpi(u) = \frac{x}{yy'},$$

il suit

$$\varpi(u) + \varpi'(u) \cdot \frac{yy'^2}{\sqrt{1+(y')^2}} = \frac{1}{yy'} \cdot \frac{dx}{d \cdot \log(x+yy')}. \tag{106}$$

---

[*] Nous supposons toujours les coordonnées rectangulaires.

Or la formule (105) différentiée partiellement donne

$$\frac{d\varphi}{\mathrm{d}x} = -1,$$

et de plus, à l'aide de l'équation (106),

$$\frac{d\varphi}{\mathrm{d}\left(\frac{1}{y'}\right)} = -y'^2 \cdot \frac{d\varphi}{\mathrm{d}y'} = -\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\log(x+yy')},$$

d'où l'on aura

$$\frac{d\varphi}{\mathrm{d}x} : \frac{d\varphi}{\mathrm{d}\left(\frac{1}{y'}\right)} = \frac{\mathrm{d}\log(x+yy')}{\mathrm{d}y},$$

et partant, en vertu de l'équation (99),

$$\mathfrak{M}_1 = x + yy',$$

ce qui donnera l'intégrale générale de l'équation (103)

$$\int \frac{x+yy'}{y'}(\mathrm{d}y - y'\,\mathrm{d}x) = \text{const.}$$

Mais on trouvera sans difficulté

$$\int \frac{x+yy'}{y'}(\mathrm{d}y - y'\,\mathrm{d}x) = \frac{y^2-x^2}{2} - xyy' + \int x\,\mathrm{d}(x+yy'),$$

c'est-à-dire

$$\int \frac{x+yy'}{y'}(\mathrm{d}y - y'\,\mathrm{d}x) = \frac{y^2-x^2}{2} - xyy' + \int \frac{x}{y'}\sqrt{1+y'^2}\,.\,\mathrm{d}u.$$

à cause de

$$y'.\,\mathrm{d}(x+yy') = \sqrt{1+y'^2}\,.\,\mathrm{d}u.$$

En posant donc

(107) $$\int f(u)\,\mathrm{d}u = \mathrm{F}(u),$$

on aura enfin, à l'aide de l'équation (103),

$$(108)\qquad \frac{y^2 - x^2}{2} - xyy' + F\left(y.\sqrt{1+y'^2}\right) = \text{const.}$$

En éliminant y' entre cette formule et l'équation (103), on obtiendra l'intégrale générale de celle-ci.

§ XX.

EXEMPLE II.

Problème. — *Trouver une courbe telle, que pour chacun de ses points la perpendiculaire abaissée de l'origine sur la tangente soit égale à une fonction quelconque de la normale.*

La condition donnée conduira immédiatement à cette équation différentielle

$$\frac{xy' - y}{\sqrt{1+y'^2}} = f\left(y\sqrt{1+y'^2}\right),$$

dont nous allons chercher l'intégrale générale. En effet, en supposant

$$f(z) = \frac{\varpi(z)}{z},$$

et comme ci-devant

$$u = y\sqrt{1+y'^2},$$

l'équation (107) pourra être présentée sous cette forme

$$(109)\qquad \varpi(u) - y(xy' - y) = 0.$$

Pour avoir, à l'aide du théorème X, le facteur d'intégration, nous observons que

$$(109\ bis)\qquad \varphi = \varpi(u) - y(xy' - y).$$

En différentiant l'équation (109), nous aurons

$$(110)\qquad \frac{\varpi'(u).y'}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{xy'^2 + xyy'' - yy'}{1 + y'^2 + yy''}.$$

La formule (109 *bis*), différentiée partiellement, donnera

$$\frac{d\varphi}{dx} = -yy',$$

$$\frac{d\varphi}{d\left(\frac{1}{y'}\right)} = -y'^2 \cdot \frac{d\varphi}{dy'} = y'^2\left[xy - \frac{\varpi'(u) \cdot yy'}{\sqrt{1+y'^2}}\right],$$

ou, à l'aide de la formule (110),

$$\frac{d\varphi}{d\left(\frac{1}{y'}\right)} = yy' \cdot \frac{dy}{d\log(x+yy')},$$

d'où il suit

$$\frac{d\varphi}{dx} : \frac{d\varphi}{d\left(\frac{1}{y'}\right)} = -\frac{d\log(x+yy')}{dy}.$$

On aura donc le facteur d'intégration

$$\mathfrak{M}_1 = \frac{1}{x+yy'},$$

et l'intégrale cherchée

$$\int \frac{dy - y'\,dx}{y'(x+yy')} = \text{const.}$$

ou, ce qui revient au même,

$$\int \frac{y\,dy}{yy'(x+yy')} - \int \frac{dx}{x+yy'} = \text{const.}$$

Pour effectuer l'intégration indiquée, nous observons que

$$\int \frac{dx}{x+yy'} = \log(x+yy') - \int \frac{d(yy')}{x+yy'},$$

d'où il résulte

$$(111)\quad \left\{\begin{aligned} \text{const.} &= -\log(x+yy') + \frac{1}{2}\cdot\int \frac{d[y^2(1+y'^2)]}{yy'(x+yy')} \\ &= -\log(x+yy') + \int \frac{y\cdot\sqrt{1+y'^2}.\, d\left(y\cdot\sqrt{1+y'^2}\right)}{yy'(x+yy')}. \end{aligned}\right.$$

Or nous aurons en général

$$yy'(x+yy') = u\left[u + \frac{xy'-y}{\sqrt{1+y'^2}}\right],$$

et partant

$$yy'(x+yy') = u[u+f(u)],$$

ce qui, substitué dans l'équation (111), donnera

$$(112)\qquad \mathrm{F}\left(y\sqrt{1+y'^2}\right) - \log(x+yy') = \text{const.},$$

en posant, pour abréger,

$$\int \frac{du}{u+f(u)} = \mathrm{F}(u).$$

L'élimination de y' entre la formule (112) et l'équation proposée donnera l'intégrale générale de celle-ci.

§ XXI.

EXEMPLE III.

Problème. — *Trouver la courbe où, pour chacun de ses points, la perpendiculaire abaissée de l'origine sur la normale divise la portion de la normale entre la courbe et l'axe des ordonnées en deux parties telles, que l'une soit toujours une fonction quelconque de l'autre.*

Posons, pour abréger,

$$u = \frac{x}{y'}\cdot\sqrt{1+y'^2},\quad v = \frac{xy'-y}{\sqrt{1+y'^2}},\quad w = \frac{\frac{x}{y'}+y}{\sqrt{1+y'^2}},$$

d'où il suit

$$(113)\qquad u = v + w;$$

la condition donnée conduit immédiatement à cette équation

$$(114) \qquad v = f(w),$$

laquelle, en posant

$$f(w) = \frac{\varpi(w)}{w} - w,$$

pourra, à l'aide de la formule (113), être présentée sous la forme

$$(115) \qquad u = \frac{\varpi(w)}{w},$$

ou, ce qui revient au même,

$$(116) \qquad \varpi(w) - \frac{x}{y'}\left(\frac{x}{y'} + y\right) = 0.$$

Pour en trouver le facteur d'intégration, soit l'équation (115) résolue par rapport à w, ce qui nous donnera

$$w = \varpi_1(u),$$

d'où l'on aura

$$\varpi(w) = \varpi_2(u).$$

Cela étant ainsi, on pourra écrire l'équation (116) de cette manière

$$(117) \qquad \varpi_2(u) - \frac{x}{y'}\left(\frac{x}{y'} + y\right) = 0;$$

la variable y ne se trouvant point dans u, le théorème IX nous donnera bien facilement le facteur propre à l'intégration. En effet, en observant que

$$\varphi = \varpi_2(u) - \frac{x}{y'}\left(\frac{x}{y'} + y\right),$$

nous aurons

$$\frac{d\varphi}{dy} = -\frac{x}{y'}$$

et

(118) $$\frac{d\varphi}{dy'} = \frac{1}{y'^2}\left[\frac{2x^2}{y'} + xy - \frac{x.\varpi'_2(u)}{\sqrt{1+y'^2}}\right].$$

De plus l'équation (117) différentiée nous a offert

$$\frac{x\ \varpi'_2(u)}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{2x^2}{y'} + xy - xy'.\frac{dx}{d\log\left(\frac{x}{y'}+y\right)};$$

ce qui, substitué dans l'équation (118), nous donnera immédiatement

$$\frac{d\varphi}{dy'} = \frac{x}{y'}\frac{dx}{d\log\left(\frac{x}{y'}+y\right)},$$

d'où, en vertu de l'équation (96), nous aurons

$$\mathfrak{M} = \frac{1}{\frac{x}{y'}+y}.$$

L'intégrale complète de l'équation (114) deviendra donc

$$\text{const.} = \int\frac{dy - y'dx}{\frac{x}{y'}+y} = \int\frac{dy}{\frac{x}{y'}+y} - \int\frac{y'dx}{\frac{x}{y'}+y},$$

ou, à cause de

$$\int\frac{dy}{\frac{x}{y'}+y} = \log\left(\frac{x}{y'}+y\right) - \int\frac{d\left(\frac{x}{y'}\right)}{\frac{x}{y'}+y},$$

encore

(119) $$\log\left(\frac{x}{y'}+y\right) - \int\frac{d\left(\frac{x}{y'}\right)+y'dx}{\frac{x}{y'}+y} = \text{const.}$$

Or, en observant que

$$d\left(\frac{x}{y'}\right) + y'dx = \sqrt{1+y'^2}.du,$$

on aura, à l'aide de l'équation (113),

$$\frac{d\left(\frac{x}{y'}\right) + y'\,dx}{\frac{x}{y'} + y} = \frac{dw}{w} + \frac{dv}{w},$$

ou, en vertu de l'équation (114),

$$\frac{d\left(\frac{x}{y'}\right) + y'\,dx}{\frac{x}{y'} + y} = \frac{dw}{w} + \frac{f'(w).dw}{w},$$

ce qui, substitué dans l'équation (119), donnera

$$\log\left(\frac{x}{y'} + y\right) - \log w - F(w) = \text{const.},$$

ou, ce qui revient au même,

(120) $$\frac{1}{2}\log(1 + y'^2) - F\left(\frac{\frac{x}{y'} + y}{\sqrt{1 + y'^2}}\right) = \text{const.},$$

en posant

$$\int \frac{f'(w).dw}{w} = F(w).$$

Enfin, en éliminant y' entre les équations (114) et (120) nous aurons l'intégrale générale de l'équation (114).

§ XXII.

EXEMPLE IV.

Problème. — *Trouver une courbe telle, que la troisième proportionnelle à l'abscisse et à l'ordonnée soit toujours égale à une fonction quelconque de la sous-normale.*

La condition donnée conduit immédiatement à cette équation

(121) $$y^2 = x.\varpi(yy'),$$

ou, ce qui revient au même, à celle-ci

$$(122) \qquad y^2 . f(yy') - x = 0,$$

si l'on pose

$$\varpi(z) . f(z) = 1.$$

Pour en trouver le facteur d'intégration, on verra sans difficulté que le théorème X est le plus convenable ; en effet, on a

$$\varphi = y^2 . f(yy') - x,$$

d'où il suit

$$\frac{d\varphi}{dx} = -1$$

et

$$\frac{d\varphi}{d\left(\frac{1}{y'}\right)} = -y'^2 . \frac{d\varphi}{dy'} = -y'^2 . y^3 . f'.$$

En différentiant (122) on obtiendra

$$y'^2 . y^3 . f' = \frac{(y - 2xy') . y'^2}{y'^2 + yy''} = -y'\left(\frac{y}{y'} - 2x\right) . \frac{dx}{d\left(\frac{y}{y'} - 2x\right)}$$

$$= -\frac{dy}{d\log\left(\frac{y}{y'} - 2x\right)},$$

ce qui donnera

$$\frac{d\varphi}{d\left(\frac{1}{y'}\right)} = \frac{dy}{d\log\left(\frac{y}{y'} - 2x\right)}.$$

En vertu de l'équation (99), on aura donc le facteur d'intégration

$$\mathfrak{M}_1 = \frac{1}{\frac{y}{y'} - 2x},$$

et l'intégrale générale de l'équation (121)

$$\text{const.} = \int \frac{1}{y'} \frac{dy - y'dx}{\frac{y}{y'} - 2x} = \int \frac{dy}{y'\left(\frac{y}{y'} - 2x\right)} - \int \frac{dx}{\frac{y}{y'} - 2x}.$$

Or, en ayant

$$-\int \frac{dx}{\frac{y}{y'} - 2x} = \frac{1}{2} \log\left(\frac{y}{y'} - 2x\right) - \frac{1}{2}\cdot \int \frac{\frac{dy}{y'} - \frac{y\,dy'}{y'^2}}{\frac{y}{y'} - 2x},$$

on trouve sans difficulté

$$\log\left(\frac{y}{y'} - 2x\right) + \int \frac{d(yy')}{y'^2\left(\frac{y}{y'} - 2x\right)} = \text{const.}$$

et enfin

(123) $$\log\left(\frac{y}{y'} - 2x\right) + F(yy') = \text{const.},$$

en posant, pour abréger,

$$\int \frac{dz}{z[1 - 2zf(z)]} = F(z) = \int \frac{\varpi(z).dz}{z[\varpi(z) - 2z]}.$$

L'élimination de y' entre les formules (121) et (123) donnera l'intégrale générale de l'équation (121).

§ XXIII.

EXEMPLE VI.

Problème. — *Trouver une courbe telle, que la perpendiculaire abaissée de l'origine sur la normale soit toujours égale à une fonction quelconque du rayon vecteur.*

La condition donnée conduit immédiatement à cette équation

(124) $$\frac{x + yy'}{\sqrt{1 + y'^2}} = f(x^2 + y^2).$$

Pour en trouver le facteur d'intégration à l'aide du théorème IX, nous observons qu'on a

$$\varphi = f(x^2 + y^2) - \frac{x + yy'}{\sqrt{1 + y'^2}},$$

et partant

(125) $$\frac{d\varphi}{dy} = 2y \cdot f' - \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}},$$

$$\frac{d\varphi}{dy'} = \frac{xy' - y}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

En différentiant l'équation (124) on obtiendra

$$2yf' = \frac{y(1 + y'^2)^2 + yy''(y - xy')}{(x + yy').(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}},$$

ce qui, substitué dans l'équation (125), donnera

$$\frac{d\varphi}{dy} = \frac{1 + y'^2 + yy''}{x + yy'} \cdot \frac{y - xy'}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{y - xy'}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{d \log(x + yy')}{dx}.$$

d'où, en vertu de l'équation (96), on aura le facteur d'intégration

(125 *bis*) $$\mathfrak{M} = \frac{1}{x + yy'}.$$

L'intégrale cherchée de l'équation (124) devient donc

$$\int \frac{dy - y'dx}{x + yy'} = \text{const.},$$

d'où, si l'on en retranche

$$\int \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2} - \text{arc}\left(\text{tang} = \frac{y}{x}\right) = 0,$$

on aura

(126) $$\text{arc}\left(\text{tang} = \frac{y}{x}\right) - \frac{1}{2}\int B \cdot \frac{d(r^2)}{r^2} = \text{const.},$$

en posant, pour abréger,

$$(127)\qquad r^2 = x^2 + y^2, \quad B = \frac{xy' - y}{x + yy'}.$$

D'ailleurs on trouvera sans difficulté

$$B^2 + 1 = \frac{x^2 + y^2}{\left(\frac{x + yy'}{\sqrt{1 + y'^2}}\right)^2},$$

d'où, en vertu de l'équation (124), on aura

$$B = \pm \frac{\sqrt{r^2 - [f(r^2)]^2}}{f(r^2)},$$

ce qui, substitué dans l'équation (126), donnera pour l'intégrale générale de l'équation (124),

$$(128)\qquad 2\,\mathrm{arc}\left(\mathrm{tang} = \frac{y}{x}\right) \pm \mathrm{F}(x^2 + y^2) = \mathrm{const.}$$

en posant, pour abréger,

$$(129)\qquad \int \frac{\sqrt{z - [f(z)]^2}\,.\,dz}{z\,.\,f(z)} = \mathrm{F}(z).$$

Corollaire I. — Soit, comme à l'ordinaire,

$$ds^2 = dx^2 + dy^2,$$

et de plus

$$s = \psi(x^2 + y^2) = \psi;$$

on a immédiatement

$$s' = \sqrt{1 + y'^2} = 2\psi'.(x + yy'),$$

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{x + yy'}{\sqrt{1 + y'^2}} = \frac{1}{2\psi'},$$

d'où il suit qu'en remplaçant dans l'équation (129) $f(z)$ par $\frac{1}{2\psi'(z)}$, c'est-à-dire qu'en faisant

$$\int \frac{dz}{z}\sqrt{4z(\psi'(z))^2 - 1} = F(z),$$

la formule (128) déterminera aussi *la courbe dont l'arc est toujours égal à une fonction quelconque du rayon vecteur.*

Pour vérifier la formule (128) dans un cas spécial, faisons

$$\psi(x^2 + y^2) = \sqrt{x^2 + y^2},$$

c'est-à-dire cherchons la courbe dont l'arc est toujours égal au rayon vecteur. En effet, à cause de

$$\psi(z) = \sqrt{z},$$

on aura

$$4z[\psi'(z)]^2 = 1,$$

et partant

$$F(z) = \text{const}.$$

L'équation de la courbe devient donc

$$2 \operatorname{arc}\left(\operatorname{tang} = \frac{y}{x}\right) = \text{const}.,$$

ou, ce qui revient au même,

$$y = A . x.$$

Corollaire II. — En faisant dans l'équation (129)

$$f(z) = \sqrt{z - [f_1(z)]^2},$$

l'équation (124) sera changée en celle-ci

$$\frac{xy' - y}{\sqrt{1 + y'^2}} = f_1(x^2 + y^2)$$

dont on a l'intégrale générale

$$(130) \qquad 2\,\mathrm{arc}\left(\mathrm{tang} = \frac{y}{x}\right) \pm F_1(x^2 + y^2) = \mathrm{const.},$$

où

$$F_1(z) = \int \frac{f_1(z)\,dz}{z\sqrt{z - [f_1(z)]^2}}.$$

Cette formule donnera *la courbe où la perpendiculaire abaissée de l'origine sur la tangente est toujours égale à une fonction quelconque du rayon vecteur.*

La formule (130), que nous venons de trouver, s'accorde parfaitement avec celle que Lacroix a proposée dans son *Traité du calcul différentiel et intégral*, t. II, p. 292.

§ XXIV.

EXEMPLE VI.

PROBLÈME. — *Trouver la courbe où la perpendiculaire abaissée de l'origine sur la tangente est toujours une fonction quelconque de la perpendiculaire abaissée sur la normale.*

La condition donnée conduit immédiatement à l'équation

$$(131) \qquad \frac{xy' - y}{\sqrt{1 + y'^2}} = f\left(\frac{x + yy'}{\sqrt{1 + y'^2}}\right).$$

Supposons

$$u = \frac{xy' - y}{\sqrt{1 + y'^2}} \quad \text{et} \quad v = \frac{x + yy'}{\sqrt{1 + y'^2}},$$

d'où nous aurons

$$u^2 + v^2 = x^2 + y^2,$$

et partant, en vertu de l'équation (131),

$$v^2 + [f(v)]^2 = x^2 + y^2,$$

laquelle formule, résolue par rapport à v, donnera

$$v = \varpi(x^2 + y^2).$$

L'équation (131) pourra donc être présentée sous la forme

$$\frac{x + yy'^2}{\sqrt{1 + y'^2}} = \varpi(x^2 + y^2),$$

$\varpi(z)$ étant l'expression de v en z qu'on obtient par la résolution de l'équation

$$v^2 + [f(v)]^2 = z.$$

A l'aide des formules que nous venons de proposer dans l'exemple V, nous pourrions immédiatement trouver l'intégrale cherchée; mais le facteur d'intégration

$$\frac{1}{x + yy'}$$

étant connu en vertu de l'équation (125 *bis*), nous donnerons ci-après sous une autre forme l'intégrale générale de l'équation (131), en effectuant immédiatement la quadrature

$$\int \frac{dy - y'dx}{x + yy'} = \text{const.}$$

En effet, à cause de

$$\frac{dy - y'dx}{\sqrt{1 + y'^2}} = \frac{(yy' + x)\,dy'}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} - d.\left(\frac{xy' - y}{\sqrt{1 + y'^2}}\right),$$

il s'ensuit

$$\frac{dy - y'dx}{x + yy'} = \frac{dy'}{1 + y'^2} - \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{x + yy'}\, d.\left(\frac{xy' - y}{\sqrt{1 + y'^2}}\right),$$

et partant, en vertu de l'équation (131), on aura l'intégrale cherchée

$$(132) \qquad \operatorname{arc}(\operatorname{tang} = y') - F\left(\frac{x + yy'}{\sqrt{1 + y'^2}}\right) = \text{const.},$$

en posant, pour abréger,

$$\int \frac{f'(z)}{z}\,\mathrm{d}z = \mathrm{F}(z)$$

et en éliminant y' entre les formules (131) et (132).

§ XXV.

EXEMPLE VII.

Trouver l'intégrale générale de l'équation différentielle

$$(133) \qquad x \cdot f_1\left(\frac{x}{y'} + ay'\right) = y' \cdot f\left(\frac{x}{y'}\sqrt{1+ay'^2}\right).$$

Faisons, pour abréger,

$$(134) \qquad z = \frac{x}{y'} + ay', \quad u = \frac{x}{y'}\sqrt{1+ay'^2};$$

nous aurons, en différentiant,

$$(134\ bis) \qquad \sqrt{1+ay'^2}\,.\,\mathrm{d}u = \mathrm{d}z.$$

Pour trouver le facteur propre à l'intégration à l'aide du théorème IX, écrivons l'équation (133) sous la forme

$$x \cdot f_1(z) - y' \cdot f(u) = 0,$$

d'où, en différentiant, nous obtiendrons

$$(135) \qquad \frac{f'(u)}{\sqrt{1+ay'^2}} = \frac{x}{y'} \cdot f_1'(z) + f_1(z) - ay' \cdot f_1(z) \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}.$$

D'ailleurs, en observant que

$$\varphi = x \cdot f_1(z) - y' \cdot f(u),$$

nous aurons

$$\frac{d\varphi}{\mathrm{d}y} = ax \,.\, f_1'(z)$$

et, à l'aide de l'équation (135),

$$\frac{d\varphi}{\mathrm{d}y'} = -ax \,.\, f_1'(z) \,.\, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z};$$

et, par suite,

$$\frac{d\varphi}{\mathrm{d}y} : \frac{d\varphi}{\mathrm{d}y'} = -\frac{\mathrm{d}\,.\,f_1(z)}{f_1(z)\ \mathrm{d}x}.$$

En vertu de l'équation (96), nous aurons donc le facteur propre à l'intégration

$$\mathfrak{M} = \frac{1}{f_1(z)} = \frac{1}{f_1\left(\frac{x}{y'} + ay\right)},$$

et l'intégrale cherchée

$$\text{const.} = \int \frac{\mathrm{d}y - y'\,\mathrm{d}x}{f_1(z)} = \int \frac{\mathrm{d}z - \left[\mathrm{d}\left(\frac{x}{y'}\right) + ay'\,\mathrm{d}x\right]}{f_1(z)},$$

ou, ce qui revient au même,

(136) $$\text{const.} = \int \frac{\mathrm{d}z}{f_1(z)} - \int \frac{\mathrm{d}\left(\frac{x}{y'}\right) + ay'\,\mathrm{d}x}{f_1(z)}.$$

Mais on a immédiatement

(137) $$\mathrm{d}\left(\frac{x}{y'}\right) + ay'\,\mathrm{d}x = \frac{y'}{x} \cdot u\,\mathrm{d}u;$$

donc en faisant, pour abréger,

$$\int \frac{\mathrm{d}z}{f_1(z)} = \mathrm{F}_1(z), \quad \int \frac{u\,\mathrm{d}u}{f(u)} = \mathrm{F}(u),$$

on aura enfin, à l'aide des formules (133) et (136),

(138) $$\mathrm{F}_1\left(\frac{x}{y'} + ay\right) - \mathrm{F}\left(\frac{x}{y'}\sqrt{1 + ay'^2}\right) = \text{const.}$$

L'élimination de y' entre cette formule et l'équation (133) donnera l'intégrale générale de celle-ci.

Observation I. — A l'aide des formules (134) et (134 *bis*) on aura

$$u\,\mathrm{d}u = \frac{x}{y'}\,\mathrm{d}z,$$

et partant, en vertu de l'équation (133),

$$\frac{\mathrm{d}z}{f_1(z)} - \frac{u\,\mathrm{d}u}{f(u)} = 0,$$

ce qui donnera immédiatement la formule (138).

Observation II. — Si l'équation proposée était de la forme

$$\frac{x}{y'} + ay = f\left(\frac{x}{y'}\sqrt{1+ay'^2}\right) = f(u),$$

en différentiant on aurait, à l'aide de l'équation (134 *bis*),

$$\left[\sqrt{1+ay'^2} - f'(u)\right]\mathrm{d}u = 0.$$

En supposant

$$\mathrm{d}u = 0,$$

on aura sans difficulté l'intégrale générale

$$[ay - f(k)]^2 + ax^2 = k,$$

k étant une constante arbitraire; la supposition

$$f'(u) = \sqrt{1+ay'^2}$$

donnera (en général) une solution singulière.

§ XXVI.

EXEMPLE VIII.

Trouver l'intégrale générale de l'équation différentielle

(139) $$\frac{(xy' - y)^m}{xy' + ay} = f(y').$$

Faisons

$$f(y') = \frac{1}{f_1(y')};$$

l'équation (139) pourra être présentée sous cette forme

$$\varphi = (xy' - y)^m . f_1(y') - xy' - ay = 0,$$

d'où nous aurons

$$\frac{d\varphi}{dy} = -\frac{m(xy' + ay)}{xy' - y} - a = -(m + a) - \frac{m(a + 1)y}{xy' - y},$$

$$\frac{d\varphi}{dy'} = -\frac{\frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\varphi}{dy} \cdot y'}{y''} = \frac{(a + 1) . dx}{d \log y'}.$$

En cherchant à l'aide du théorème IX le facteur propre à l'intégration, à cause de

$$\frac{d\varphi}{dy} : \frac{d\varphi}{dy'} = -\frac{m + a}{a + 1} \cdot \frac{d \log y'}{dx} - \frac{my}{xy' - y} \cdot \frac{y''}{y'}$$

$$= -\frac{m + a}{a + 1} \cdot \frac{d \log y'}{dx} - m . \frac{d \log \left(x - \frac{y}{y'}\right)}{dx},$$

ce facteur deviendra

$$\mathfrak{M} = (y')^{\frac{a(m-1)}{a+1}} . (xy' - y)^{-m},$$

et, par suite, l'intégrale cherchée

(140) $$\text{const.} = \int (y')^{\frac{a(m-1)}{a+1}} . (xy' - y)^{-m} (dy - y' dx).$$

D'ailleurs on a immédiatement

$$dy - y'\,dx = d(xy' - y) - x\,dy',$$

ce qui, substitué dans l'équation (140), lui fait prendre la forme

$$\begin{aligned}\text{const.} &= \int (y')^{\frac{a(m-1)}{a+1}} (xy'-y)^{-m}\, d(xy'-y) \\ &\quad - \int (y')^{\frac{a(m-1)}{a+1}} . (xy'-y)^{-m} . x\, dy' \\ &= \frac{(y')^{\frac{a(m-1)}{a+1}} (xy'-y)^{1-m}}{1-m} - \frac{1}{a+1} . \int (y')^{\frac{a(m-1)}{a+1}} . \frac{xy'+ay}{(xy'-y)^m}\, dy',\end{aligned}$$

d'où en posant, pour abréger,

$$\int (y')^{\frac{a(m-1)}{a+1}} . \frac{dy'}{f(y')} = F(y'),$$

on conclut

$$(141) \qquad \frac{(y')^{\frac{a(m-1)}{a+1}} . (xy'-y)^{1-m}}{1-m} - \frac{F(y')}{a+1} = \text{const.}$$

L'élimination entre cette formule et l'équation (139) donnera enfin l'intégrale cherchée.

Observation I. — Pour $m=1$, il faut dans l'équation (141) remplacer

$$\frac{(y')^{\frac{a(m-1)}{a+1}} . (xy'-y)^{1-m}}{1-m} \quad \text{par} \quad \log(xy'-y).$$

Observation II. — Pour $a+1=0$, la formule (141) est en défaut; mais, dans ce cas, l'équation proposée appartient évidemment à la classe qui est connue depuis longtemps sous le nom d'*équation de Clairaut.*

§ XXVII.

EXEMPLE IX.

Trouver l'intégrale générale de l'équation différentielle

$$(142)\qquad xy' - ry = y^m . f(y^{1-r} . y'^r).$$

Faisons, pour abréger,

$$u = y^{1-r} . (y')^r,$$

d'où l'on conclut

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = y' . \left(\frac{y}{y'}\right)^{-r} . \frac{\mathrm{d}\left(x - r . \frac{y}{y'}\right)}{\mathrm{d}x}.$$

Pour trouver, à l'aide du théorème X, le facteur propre à l'intégration, nous écrivons l'équation proposée sous la forme

$$\varphi = y^m . f(u) - xy' + ry = 0,$$

ce qui donnera

$$\frac{d\varphi}{\mathrm{d}x} = - y',$$

$$(143)\qquad \frac{d\varphi}{\mathrm{d}\left(\frac{1}{y'}\right)} = - y'^2 \left[\frac{ry}{y'} . y^m . \left(\frac{y}{y'}\right)^{-r} . f'(u) - x\right].$$

D'ailleurs, en différentiant l'équation (142), nous aurons

$$y^m . \left(\frac{y}{y'}\right)^{-r} . f'(u) = 1 + \frac{\left(y'' - \frac{my'^2}{y}\right)\left(x - r . \frac{y}{y'}\right)\mathrm{d}x}{y' . \mathrm{d}\left(x - r . \frac{y}{y'}\right)},$$

d'où, à cause de

$$y'' - \frac{my'^2}{y} = \frac{y'^2}{ry} . \frac{\mathrm{d}\left(x - r . \frac{y}{y'}\right)}{\mathrm{d}x} + \frac{[r(1-m) - 1]y'^2}{ry},$$

nous concluons

$$y^m \cdot \left(\frac{y}{y'}\right)^{-r} \cdot f'(u) = 1 + \frac{y'}{ry}\left(x - r.\frac{y}{y'}\right) + \frac{r(1-m)-1}{r} \cdot \frac{y'}{y} \frac{dx}{d\left(x - r\frac{y}{y'}\right)},$$

ce qui, substitué dans l'équation (143), lui fait prendre la forme

$$\frac{d\varphi}{d\left(\frac{1}{y'}\right)} = -y' \cdot \frac{[r(1-m)-1]\,dy}{d\log\left(x - r\frac{y}{y'}\right)}.$$

Par suite, en vertu de l'équation (99), nous aurons le facteur propre à l'intégration

$$\mathfrak{M}_1 = \left(x - r.\frac{y}{y'}\right)^{\frac{1}{r(1-m)-1}},$$

et l'intégrale cherchée

$$\begin{aligned} \text{const.} &= \int \left(x - r.\frac{y}{y'}\right)^{\frac{1}{r(1-m)-1}} . (dy - y'dx) \\ &= \int \left(x - r.\frac{y}{y'}\right)^{\frac{1}{r(1-m)-1}} \cdot \left[\frac{ry\,dy' + (1-r)y'dy}{y'^2} - d\left(x - r\frac{y}{y'}\right)\right], \end{aligned}$$

ou, ce qui revient au même,

$$\text{const.} = \int \frac{(xy' - ry)^{\frac{1}{r(1-m)-1}} . y}{(y')^{\frac{r(1-m)}{r(1-m)-1}}} \cdot \frac{du}{u} - \frac{r(1-m)-1}{r(1-m)} \cdot \left(x - r\frac{y}{y'}\right)^{\frac{r(1-m)}{r(1-m)-1}},$$

d'où, en posant

$$\int \left(\frac{f(u)}{u^{r(1-m)-m}}\right)^{\frac{1}{r(1-m)-1}} du = F(u),$$

on obtient, en vertu de l'équation (142), après quelques réductions

très-faciles,

$$(144)\qquad F(y^{1-r}.y'^r) - \frac{r(1-m)-1}{r(1-m)}\left(x - r.\frac{y}{y'}\right)^{\frac{r(1-m)}{r(1-m)-1}} = \text{const.}$$

L'élimination de y' entre cette formule et l'équation (142) nous donnera enfin l'intégrale générale de celle-ci.

Observation I. — Pour $m=1$, il faut remplacer le second terme de l'équation (144) par

$$-\log\left(x - r.\frac{y}{y'}\right).$$

Observation II. — Si l'on a

$$r(1-m)-1=0,$$

la formule (144) devient en défaut; mais dans ce cas l'équation proposée prend la forme

$$(145)\qquad xy' - ry = y^{1-\frac{1}{r}}.f(u),$$

d'où l'on obtient, en différentiant,

$$\left[x - ru^{1-\frac{1}{r}}.f'(u)\right]du = 0.$$

En posant $du=0$, d'où l'on conclut

$$u = y^{1-r}.y'^r = c^r,$$

ou, ce qui revient au même,

$$y' = cy^{1-\frac{1}{r}},$$

c étant une constante arbitraire, nous aurons, en substituant dans l'équation (145) la valeur de y', l'intégrale générale de l'équation (145)

$$cx - f(c^r) = ry^{\frac{1}{r}}.$$

En posant

$$x - ru^{1-\frac{1}{r}} . f'(u) = 0,$$

on aura (en général) une solution singulière.

§ XXVIII.

EXEMPLE X.

Trouver l'intégrale générale de l'équation différentielle

(146) $$f_1(xy' - ry) = x . f(x^{1-r} . y').$$

Faisons, pour abréger,

$$z = xy' - ry, \quad u = x^{1-r} . y',$$

d'où l'on obtiendra sans difficulté

(146 *bis*) $$du = x^{-r} dz;$$

la différentiation de l'équation (146) donnera

(147) $$x^{2-r} . f'(u) = x . f'_1(z) - \frac{f_1(z)}{dz} .$$

Pour avoir à l'aide du théorème IX le facteur propre à l'intégration, nous écrivons l'équation (146) sous la forme

$$\varphi = f_1(z) - x . f(u) = 0,$$

d'où l'on conclut

$$\frac{d\varphi}{dy} = - r . f'_1(z),$$

et, à l'aide de l'équation (147),

$$\frac{d\varphi}{dy'} = \frac{f_1(z)}{dz} .$$

Par suite, en ayant

$$\frac{d\varphi}{dy} : \frac{d\varphi}{dy'} = -r \cdot \frac{d.f_1(z)}{f_1(z)},$$

nous obtiendrons, en vertu de l'équation (96), le facteur propre à l'intégration

$$\mathfrak{M} = \frac{1}{[f_1(z)]^r} = \frac{1}{[f_1(xy'-ry)]^r},$$

et l'intégrale cherchée

$$\text{const.} = \int \frac{dy - y'dx}{[f_1(z)]^r} = \int \frac{x^r du - dz}{[f_1(z)]^r}.$$

En observant la relation (146) et en posant, pour abréger,

$$\int \frac{du}{[f(u)]^r} = F(u), \quad \int \frac{dz}{[f_1(z)]^r} = F_1(z),$$

on aura enfin

$$(148) \qquad F(x^{1-r}.y') - F_1(xy' - ry) = \text{const.}$$

Observation I. — A l'aide des formules (146) et (146 *bis*) on aura

$$\frac{du}{[f(u)]^r} - \frac{dz}{[f_1(z)]^r} = 0,$$

ce qui donnera immédiatement la formule (148).

Observation II. — Si l'équation proposée était de la forme

$$(149) \qquad xy' - ry = f(x^{1-r}.y') = f(u),$$

on obtiendrait, en différentiant,

$$[f'(u) - x^{-r}]\,du = 0.$$

En posant

$$du = 0,$$

d'où l'on conclut

$$u = x^{1-r}.y' = c,$$

c étant une constante arbitraire, on aura l'intégrale générale de l'équation (149)

$$cx^r - ry = f(c).$$

§ XXIX.

EXEMPLE XI.

Trouver l'intégrale générale de l'équation différentielle

(150) $$xy' + ay + b = f(x.y'^n).$$

Faisons, pour abréger,

$$u = x.y'^n,$$

d'où il vient

$$du = (y')^{n-1}(y'\,dx + nx\,dy').$$

En différentiant l'équation (150), nous aurons

(151) $$f'(u) = \frac{x\,dy' + (a+1)y'\,dx}{du}.$$

Pour trouver, à l'aide du théorème IX, le facteur propre à l'intégration, nous écrivons l'équation proposée sous la forme

$$\varphi = f(u) - xy' - ay - b = 0,$$

d'où l'on conclut, à l'aide de l'équation (151),

$$\frac{d\varphi}{dy} = -a, \quad \frac{d\varphi}{dy'} = [n(a+1) - 1] \cdot \frac{dx}{d\log u}.$$

Par suite, en vertu de l'équation (96), nous aurons le facteur cherché

$$\mathfrak{M} = (u)^{-\frac{a}{n(a+1)-1}},$$

et l'intégrale dont il s'agit

$$\text{const.} = \int u^{-\frac{a}{n(a+1)-1}}(dy - y'dx)$$
$$= \int u^{-\frac{a}{n(a+1)-1}}\,dy - \int (y')^{\frac{n-1}{n(a+1)-1}}\,.\,x^{-\frac{a}{n(a+1)-1}}\,dx.$$

En intégrant par parties le second terme, nous aurons après quelques réductions bien faciles

$$\int u^{-\frac{a}{n(a+1)-1}}[x\,dy' + (a+1)\,y'dy]$$
$$-\frac{n(a+1)-1}{n-1}\cdot(x^{a+1}\,.\,y')^{\frac{n-1}{n(a+1)-1}} = \text{const.},$$

ce qui, en vertu de l'équation (151), en posant

$$\int \frac{f'(u)\,du}{(u)^{\frac{a}{n(a+1)-1}}} = F(u),$$

donnera enfin, en vertu de l'équation (151),

$$F(xy'^n) - \frac{n(a+1)-1}{n-1}\cdot(x^{a+1}.y')^{\frac{n-1}{n(a+1)-1}} = \text{const.}$$

En éliminant y' entre cette formule et l'équation (150), nous aurons l'intégrale générale de celle-ci.

Observation I. — Pour $n=1$, il faut remplacer

$$\frac{n(a+1)-1}{n-1}(x^{a+1}\,.\,y')^{\frac{n-1}{n(a+1)-1}} \quad \text{par} \quad \log(x^{a+1}.y').$$

Observation II. — Si l'on a

$$n(a+1)-1=0, \quad \text{ou, ce qui revient au même,} \quad a = \frac{1}{n}-1,$$

l'équation proposée devient

$$xy' - y + \frac{y}{n} + b = f(u),$$

qui différentiée donnera

$$\left[\frac{y'^{n-1}}{n} - f'(u)\right] \mathrm{d}u = 0.$$

En posant $\mathrm{d}u = 0$, d'où il suit

$$u = xy'^n = c^n,$$

c étant une constante arbitraire, nous aurons l'intégrale générale

$$cx^{1-\frac{1}{n}} - \left(1 - \frac{1}{n}\right) y + b = f(c^n).$$

Si l'on avait posé

$$\frac{y'^{n-1}}{n} - f'(u) = 0,$$

on aurait eu (en général) une solution singulière.

§ XXX.

EXEMPLE XII.

Trouver l'intégrale générale de l'équation différentielle

(152) $$\frac{x + yy'}{\sqrt{1 + y'^2}} = f_1(y') \cdot f\left(\frac{xy' - y}{\sqrt{1 + y'^2}}\right).$$

Soit, pour abréger,

(153) $$u = \frac{x + yy'}{\sqrt{1 + y'^2}};$$

(154) $$v = \frac{xy' - y}{\sqrt{1 + y'^2}},$$

d'où il suit

(155) $$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \sqrt{1 + y'^2} - \dfrac{vy''}{1 + y'^2}, & \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \dfrac{u\,y''}{1 + y'^2}, \\ \dfrac{du}{\mathrm{d}y'} = -\dfrac{v}{1 + y'^2}, & \dfrac{dv}{\mathrm{d}y'} = \dfrac{u}{1 + y'^2}. \end{cases}$$

L'équation proposée, que nous pouvons écrire sous la forme

$$(155\ bis)\qquad \varphi = u - f_1(y').f(v) = 0,$$

donnera, en la différentiant, à l'aide de l'équation (155),

$$(156)\qquad \frac{f_1(y').f'(v)}{1+y'^2} = \frac{du}{u\,dy'} - \frac{d.f_1(y')}{f_1(y')\,dy'}.$$

D'ailleurs, à l'aide de l'équation (156), nous aurons de l'équation (155 *bis*),

$$\frac{d\varphi}{dy} = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} + \frac{\sqrt{1+y'^2}}{dy'}\left[\frac{du}{u} - \frac{df_1(y')}{f_1(y')}\right],$$

$$\frac{d\varphi}{dy'} = -\frac{\sqrt{1+y'^2}}{dy'}\cdot dx,$$

d'où il suit

$$\frac{d\varphi}{dy} : \frac{d\varphi}{dy'} = -\frac{y'\,dy'}{(1+y'^2)\,dx} - \frac{du}{u\,dx} + \frac{df_1(y')}{f_1(y').dx},$$

et par suite, en vertu de l'équation (96), nous aurons le facteur propre à l'intégration

$$\mathfrak{M} = \frac{f_1(y')}{x+yy'}.$$

L'intégrale cherchée devient donc

$$\text{const.} = \int \frac{f_1(y')}{x+yy'}(dy - y'\,dx) = \int \frac{1}{f(v)}\cdot\frac{dy - y'\,dx}{\sqrt{1+y'^2}},$$

d'où, à cause de

$$\frac{1}{f(v)}\cdot\frac{dy - y'\,dx}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{f_1(y')\,dy'}{1+y'^2} - \frac{dv}{f(v)},$$

en posant

$$\int \frac{f_1(y')\,dy'}{1+y'^2} = F_1(y'), \quad \int \frac{dv}{f(v)} = F(v),$$

nous aurons enfin

$$(157)\qquad F_1(y') - F\left(\frac{xy'-y}{\sqrt{1+y'^2}}\right) = \text{const}.$$

L'élimination de y' entre cette formule et l'équation (152) donnera l'intégrale générale de celle-ci.

Observation I. — A l'aide de la seconde des formules (155) et de l'équation (155 *bis*) on aura

$$\frac{f_1(y').\,dy'}{1+y'^2} - \frac{dv}{f(v)} = 0,$$

ce qui donne immédiatement la formule (157).

Observation II. — Pour $f_1(y') = 1$, la formule (157) se réduit à celle que nous avons proposée dans l'équation (132).

§ XXXI.

EXEMPLE XIII.

Trouver l'intégrale générale de l'équation différentielle

$$(158)\qquad \frac{xy'+my}{(y')^r} = f\left(\frac{xy'+ny}{(y')^s}\right),$$

m, n, r et s étant des constantes quelconques qui satisfont à la seule condition

$$(159)\qquad (r-s)(m-n)[m-s(m+1)][n-r(n+1)] = 0.$$

Soit, pour abréger.

$$(160)\qquad u = \frac{xy'+my}{(y')^r},$$

$$(161)\qquad v = \frac{xy'+ny}{(y')^s};$$

d'où l'on conclut

$$(162)\qquad \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \dfrac{(m+1)y'^2 + [(1-r)xy' - mry].y''}{(y')^{r+1}}, \\[2ex] \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \dfrac{(n+1)y'^2 + [(1-s)xy' - nsy].y''}{(y')^{s+1}}, \end{cases}$$

et de plus

$$(163)\qquad \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y'} = \dfrac{(1-r)xy' - mry}{(y')^{r+1}}, \quad \dfrac{du}{\mathrm{d}y} = \dfrac{m}{(y')^r}, \\[2ex] \dfrac{dv}{\mathrm{d}y'} = \dfrac{(1-s)xy' - nsy}{(y')^{s+1}}, \quad \dfrac{dv}{\mathrm{d}y} = \dfrac{n}{(y')^s}. \end{cases}$$

L'équation (158), qui pourra être présentée sous la forme

$$(164)\qquad \varphi = f(v) - u = 0,$$

donnera, en la différentiant,

$$(165)\qquad f'(v) = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}.$$

Pour trouver, à l'aide du théorème IX, le facteur propre à l'intégration, nous aurons des équations (164) et (165)

$$\frac{d\varphi}{\mathrm{d}y} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}\cdot\frac{dv}{\mathrm{d}y} - \frac{du}{\mathrm{d}y},$$
$$\frac{d\varphi}{\mathrm{d}y'} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}\cdot\frac{dv}{\mathrm{d}y'} - \frac{du}{\mathrm{d}y'},$$

et de plus, à l'aide des relations (162) et (163),

$$\frac{d\varphi}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{(y')^r}\cdot\frac{(n-m)y'^2 + [(r-s-p)xy' - (ns-mr-q)y].y''}{(n+1)y'^2 + [(1-s)xy' - nsy].y''},$$
$$\frac{d\varphi}{\mathrm{d}y'} = \frac{1}{(y')^{r-1}}\cdot\frac{pxy' - qy}{(n+1)y'^2 + [(1-s)xy' - nsy].y''},$$

en posant, pour abréger,

$$(166)\qquad p = (1-s)(m+1) - (1-r)(n+1),$$
$$(167)\qquad q = ns(m+1) - mr(n+1).$$

Par suite, nous aurons

$$\frac{d\varphi}{dy} : \frac{d\varphi}{dy'} = \frac{(n-m)y'^2 + [(r-s-p)xy' - (ns-mr-q)y].y''}{y'(pxy'-qy)},$$

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{d\varphi}{dy} : \frac{d\varphi}{dy'} = \frac{k.dy'}{y'} + l\frac{(p-q)y'+pxy''}{pxy'-qy} = \frac{k\ d\log y' + l.d\log(pxy'-qy)}{dx},$$

ayant posé

(168) $$k.q = ns - mr - q,$$

(169) $$(p-q).l = n - m,$$

(170) $$a = ns(1-r) - mr(1-s),$$

et en supposant que m, n, r et s soient tels, que

(171) $$\frac{1}{p} + \frac{1}{a} = \frac{1}{q}.$$

Le facteur propre à l'intégration devient donc

$$\mathfrak{M} = (y')^k (pxy' - qy)^l,$$

et l'intégrale cherchée

$$\text{const.} = \int (y')^k (pxy' - qy)^l (dy - y'dx),$$

p et q étant donnés par les formules (166) et (167), k et l par les formules (168) et (169).

En ayant identiquement

$$a(p-q) - pq = (r-s)(m-n)[m - s(m+1)][n - r(n+1)],$$

on verra sans difficulté que la condition fixée par l'équation (171) n'est que celle donnée par l'équation (159).

Cela étant ainsi, nous allons examiner spécialement chacun des quatre cas où la condition de l'équation (159) est satisfaite.

Ier cas : $r = s$. Dans ce cas on trouvera

$$p = (1 - s)(m - n),$$
$$q = -s(m - n),$$
$$k = 0, \qquad l = -1,$$

et l'intégrale cherchée

$$(172)\quad \left\{ \begin{aligned} \text{const.} &= \int \frac{dy - y' dx}{(1-s)xy' + sy} \\ &= \log[(1-s)xy' + sy] - \int \frac{y' dx + (1-s)x dy'}{(1-s)xy' + sy}. \end{aligned} \right.$$

D'ailleurs, à cause de $r = s$, il suit de l'équation (162)

$$y' dx + (1-s)x dy' = \frac{(y')^s (m dv - n du)}{m - n},$$

et en posant, pour abréger,

$$A = m - s(m+1),$$
$$B = n - s(n+1),$$

on conclut des équations (160) et (161)

$$(m - n)[(1-s)xy' + sy] = (y')^s (Av - Bu).$$

Par suite on aura de l'équation (172)

$$\begin{aligned} \text{const.} &= \log[(1-s)xy' + sy] - \int \frac{m dv - n du}{Av - Bu} \\ &= \log[(1-s)xy' + sy] - \int \frac{[m - nf'(v)] dv}{Av - Bf(v)}; \end{aligned}$$

ou, ce qui revient au même,

$$(173)\qquad \log[(1-s)xy' + sy] - F\left(\frac{xy' + ny}{(y')^s}\right) = \text{const.},$$

en posant

$$\int \frac{[m - nf'(v)]\,\mathrm{d}v}{\mathrm{A}v - \mathrm{B}f(v)} = \mathrm{F}(v).$$

L'élimination de y' entre l'équation (173) et l'équation différentielle proposée donnera l'intégrale générale de celle-ci.

IIe cas : $m = n$. Dans ce cas on aura

$$\begin{aligned} p &= (m+1)(r-s),\\ q &= -m(m+1)(r-s),\\ l &= 0, \qquad k = -\frac{m}{m+1}, \end{aligned}$$

et l'intégrale cherchée

$$\begin{aligned} \text{const.} &= \int (y')^k \{\mathrm{d}[(1-s)xy' + sy] - [\mathrm{d}y + (1-s)x\,\mathrm{d}y']\}\\ &= (y')^k[(1-s)xy' + sy] - \frac{1}{m+1}\cdot\int (y')^{k-1}\{[(1-s)xy' - msy]\,\mathrm{d}y\\ &\qquad\qquad + (m+1)y'^2\,\mathrm{d}y'\}, \end{aligned}$$

laquelle formule, à cause de

$$[(1-s)xy' - msy)\,\mathrm{d}y' + (m+1)y'^2\,\mathrm{d}y = (y')^{s+1}.\,\mathrm{d}v,$$

peut être présentée sous la forme

$$\text{const.} = (y')^k[(1-s)xy' + sy) - \frac{1}{m+1}\int (y')^{s+k}.\,\mathrm{d}v.$$

D'ailleurs, à l'aide de l'équation (158), on obtiendra

$$(y')^{s-r} = \frac{f(v)}{v},$$

et, en observant la valeur de k,

$$(y')^{s+k} = \left(\frac{f(v)}{v}\right)^{\frac{m-s(m+1)}{(m+1)(r-s)}},$$

d'où l'on aura enfin

$$(174) \qquad \frac{(1-s)xy' + sy}{(y')^{\frac{m}{m+1}}} - \frac{1}{m+1}\cdot\mathrm{F}\left(\frac{xy' + my}{(y')^s}\right) = \text{const.}.$$

en faisant, pour abréger,

$$\int \left(\frac{f(v)}{v}\right)^{\frac{m-s(m+1)}{(m+1)(r-s)}} \cdot dv = F(v).$$

L'élimination de y' entre l'équation (174) et l'équation proposée donnera l'intégale générale de celle-ci.

Observation I. — Pour $m+1=0$, la formule (174) devient en défaut; mais dans ce cas l'équation proposée, résolue par rapport à $xy'-y$, se réduira à la forme connue de Clairaut.

IIIe cas : $s(m+1)-m=0$. Dans ce cas on aura

$$(175)\qquad \begin{cases} p = r(n+1)-n, \\ q = -mp, \\ k = -\dfrac{n(r-s)}{p}, \\ l = \dfrac{n-s(n+1)}{p}, \\ k+s+lr=0, \end{cases}$$

et l'intégrale cherchée

$$\begin{aligned} \text{const.} &= \int (y')^k (xy'+my)^l [d(xy'+my) - (x\,dy + (m+1)\,y'\,dx)] \\ &= \frac{(y')^k (xy'+my)^{l+1}}{l+1} - \frac{1}{n+1} \cdot \int (y')^{k-1} (xy'+my)^l \\ &\qquad\qquad \times [(m+1)(n+1)\,y'^2\,dx + (xy'-mny)\,dy']. \end{aligned}$$

Or, à cause de

$$(n+1)(m+1)\,y'^2\,dx + (xy'-mny)\,dy' = (m+1)(y')^{s+1}\,dv,$$

nous pouvons écrire l'intégrale trouvée sous la forme

$$\text{const.} = \frac{(y')^k (xy'+my)^{l+1}}{l+1} - \frac{m+1}{n+1} \cdot \int (y')^{k+s} (xy'+my)^l.\,dv,$$

ou, en vertu de la dernière des formules (175),

$$\text{const.} = \frac{(y')^k (xy' + my)^{l+1}}{l+1} - \frac{m+1}{n+1} \cdot \int \left(\frac{xy' + my}{(y')^r}\right)^l d\nu.$$

En posant

$$\int [f(\nu)]^l . d\nu = F(\nu),$$

et en observant que

$$\frac{n+1}{l+1} = \frac{p}{r-s},$$

nous aurons enfin

$$(176) \quad \frac{p}{r-s} \cdot (y')^k (xy' + my)^{l+1} - (m+1) . F\left(\frac{xy' + my}{(y')^{\frac{m}{m+1}}}\right) = \text{cont.},$$

les valeurs de p, q et l étant données par les relations (175).

En éliminant y' entre cette formule et l'équation différentielle proposée, nous aurons l'intégrale générale de celle-ci.

IVe cas : $r(n+1) - n = 0$. Dans ce cas on aura

$$(177) \quad \begin{cases} p = m - s(m+1), \\ q = -np, \\ k = -\dfrac{m(r-s)}{p}, \\ l = \dfrac{r(m+1) - m}{p}, \\ k + r + ls = 0, \end{cases}$$

et l'intégrale cherchée

$$\begin{aligned} \text{const.} &= \int (y')^k (xy' + ny)^l \{d(xy' + ny) - [(n+1) y' dx + x dy']\} \\ &= \frac{(y')^k (xy' + ny)^{l+1}}{l+1} - \frac{1}{m+1} \cdot \int (y')^{k-1} (xy' + ny)^l \\ &\qquad \times [(m+1)(n+1) y'^2 dx + (xy' - mny) dy'], \end{aligned}$$

ce que nous pouvons écrire sous la forme

$$\text{const.} = \frac{(y')^k (xy' + ny)^{l+1}}{l+1} - \frac{n+1}{m+1} \cdot \int \left(\frac{xy' + ny}{(y')^s}\right)^l du,$$

à cause de

$$(m+1)(n+1) \cdot y'^2 \, dx + (xy' - mny) dy' = (n+1)(y')^{r+1} \cdot du.$$

D'ailleurs il suit de l'équation (165)

$$du = f'(v) \cdot dv.$$

En posant donc

$$\int (v)^l \cdot f'(v) \cdot dv = F(v),$$

et en observant que

$$\frac{m+1}{l+1} = \frac{p}{r-s},$$

nous aurons enfin

$$(178) \qquad \frac{p}{r-s} \cdot (y')^k (xy' + ny)^{l+1} - (n+1) \cdot F\left(\frac{xy' + ny}{(y')^s}\right) = \text{const.},$$

les valeurs de p, k et l étant données par les équations (177).

L'élimination de (y') entre cette formule et l'équation différentielle proposée nous en donnera l'intégrale générale.

Observation I. — Si l'on a en même temps

$$r(n+1) - n = 0 \quad \text{et} \quad s(m+1) - m = 0,$$

les formules (176) et (178) deviennent en défaut. Mais alors il n'y a aucune difficulté de trouver l'intégrale de

$$(178 \textit{ bis}) \qquad u = f(v),$$

où, dans ce cas,

$$u = \frac{xy' + my}{(y')^{\frac{n}{n+1}}}, \qquad v = \frac{xy' + ny}{(y')^{\frac{m}{m+1}}}.$$

et partant

$$(n+1)(y')^{\frac{1}{n+1}}.\,du = (m+1)(y')^{\frac{1}{m+1}}\,dv.$$

En effet, en différentiant l'équation (178 *bis*) on aura l'équation

$$dv.\left[(m+1).(y')^{\frac{1}{m+1}} - (n+1)(y')^{\frac{1}{n+1}}.\,f'(v)\right] = 0,$$

qui est satisfaite en posant

$$dv = 0,$$

ce qui donnera

$$v = \frac{xy' + ny}{(y')^{\frac{m}{m+1}}} = c,$$

c étant une constante arbitraire. En éliminant y' entre cette formule et

$$\frac{xy' + my}{(y')^{\frac{n}{n+1}}} = f(c),$$

on aura l'intégrale générale proposée.

Si l'on avait supposé

$$(m+1)(y')^{\frac{1}{m+1}} - (n+1)(y')^{\frac{1}{n+1}}.\,f'(v) = 0,$$

on aurait eu (en général) une solution singulière.

§ XXXII.

EXEMPLE XIV.

Trouver l'intégrale générale de l'équation différentielle

(179) $$xy'^2 + ayy' + bx = f(y').$$

En différentiant l'équation proposée, qui peut être écrite de cette manière,

$$(180) \qquad \varphi = f(y') - xy'^2 - ayy' - bx = 0,$$

on aura

$$f'(y') - 2xy' - ay = \frac{b + (1+a)y'^2}{y''}.$$

Or, pour trouver à l'aide du théorème IX le facteur propre à l'intégration, différentions l'équation (180) par rapport à y et y'; on obtiendra

$$\frac{d\varphi}{dy} = -ay',$$

$$\frac{d\varphi}{dy'} = f'(y') - 2xy' - ay = \frac{b + (1+a)y'^2}{y''},$$

d'où il vient

$$\frac{d\varphi}{dy} : \frac{d\varphi}{dy'} = -\frac{a}{2(1+a)} \cdot \frac{2(1+a)y' \cdot y''}{b + (1+a) \cdot y'^2},$$

et, en vertu de l'équation (96), le facteur cherché devient

$$\mathfrak{M} = [b + (1+a)y'^2]^{-\frac{a}{2(1+a)}}.$$

L'intégrale dont il s'agit devient donc

$$\begin{aligned} \text{const.} &= \int [b + (1+a)y'^2]^{-\frac{a}{2(1+a)}} (dy - y'dx) \\ &= [b + (1+a)y'^2]^{-\frac{a}{2(1+a)}} \cdot (y - xy') \\ &\quad + \int [b + (1+a)y'^2]^{-\frac{a}{2(1+a)} - 1} \cdot f(y')\, dy', \end{aligned}$$

ou, ce qui revient au même,

$$(181) \qquad [b + (1+a)y'^2]^{-\frac{a}{2(1+a)}} \cdot (y - xy') + F(y') = \text{const.},$$

en posant, pour abréger,

$$\int [b + (1 + a) y'^2]^{-\frac{a}{2(1+a)} - 1} . f(y') \, dy' = F(y').$$

L'élimination de y' entre les formules (179) et (181) donnera enfin l'intégrale générale de celle-ci.

Observation I. — Pour $a + 1 = 0$, l'équation proposée devient

$$xy'^2 - xy' + bx = f(y'),$$

dont on aura l'intégrale générale

$$b(y - xy') e^{\frac{y'^2}{2b}} + \int e^{\frac{y'^2}{2b}} f(y') . \, dy' = \text{const.},$$

en observant que pour $a = -1$

$$\lim \left(1 + \frac{(a+1) y'^2}{b}\right)^{-\frac{a}{2(a+1)}} = e^{\frac{y'^2}{2b}}.$$

Observation II. — Si l'on a en même temps

$$a + 1 = 0 \quad \text{et} \quad b = 0,$$

la formule (181) devient en défaut. Mais dans ce cas l'équation proposée se réduira immédiatement à la forme de Clairaut.

§ XXXIII.

EXEMPLE XV.

Trouver l'intégrale générale de l'équation différentielle

(182) $$y . f_1(y') = f\left(x - \frac{y}{y'}\right).$$

On voit facilement qu'en cherchant, à l'aide du théorème X, le fac-

teur propre à l'intégration, on aura ici

$$\varphi = f\left(x - \frac{y}{y'}\right) - y \cdot f_1(y').$$

En différentiant, on obtiendra

$$f'\left(x - \frac{y}{y'}\right) = \frac{y'^2}{yy''}[y' \cdot f_1(y') + yy'' \cdot f'_1(y')],$$

et de plus

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{y'^2}{yy''}[y' \cdot f_1(y') + yy'' \cdot f'_1(y')],$$

$$\frac{d\varphi}{d\left(\frac{1}{y'}\right)} = -\frac{y'^3 \cdot f_1(y')}{y''},$$

d'où l'on aura

$$\frac{d\varphi}{dx} : \frac{d\varphi}{d\left(\frac{1}{y'}\right)} = -\frac{1}{y} - \frac{d \cdot f_1(y')}{f_1(y')\, dy},$$

et en vertu de l'équation (99) le facteur cherché

$$\mathfrak{M}_1 = \frac{1}{y \cdot f_1(y')}.$$

L'intégrale dont il s'agit devient donc

$$\text{const.} = \int \frac{dy - y'\, dx}{y \cdot y'\, f_1(y')} = \int \frac{dy'}{y'^2 \cdot f_1(y')} - \int \frac{d\left(x - \frac{y}{y'}\right)}{y \cdot f_1(y')},$$

c'est-à-dire, en vertu de l'équation (182),

(183) $$F\left(x - \frac{y}{y'}\right) - \int \frac{dy'}{y'^2 \cdot f_1(y')} = \text{const.},$$

en posant, pour abréger,

$$\int \frac{dz}{f(z)} = F(z).$$

En éliminant y' entre les équations (182) et (183), on aura l'intégrale générale de l'équation (182).

Observation I. — En posant

$$z = x - \frac{y}{y'},$$

d'où il suit

$$dz = \frac{y\,dy'}{y'^2},$$

on aura, à l'aide de l'équation (182),

$$\frac{dz}{f(z)} - \frac{dy'}{y'^2 . f_1(y')} = 0,$$

ce qui donne immédiatement la formule (183).

§ XXXIV.

EXEMPLE XVI.

Trouver l'intégrale générale de l'équation différentielle

$$(184) \qquad f_1(y'^2 + 2by + a) = y' f(y' + bx).$$

En posant

$$u = y'^2 + 2by + a,$$
$$z = y' + bx,$$

d'où il suit

$$(185) \qquad \begin{cases} du = 2y'\,dz, \\ dz = (y'' + b)\,dx, \end{cases}$$

l'équation proposée peut être présentée sous cette forme

$$\varphi = y' . f(z) - f_1(u) = 0.$$

En différentiant on obtiendra

$$y' . f'(z) = - \frac{f_1(u) . dy'}{y' . dz} + 2y' . f'_1(u) = -2\left[\frac{f_1(u)\,dy'}{du} - y' . f'_1(u)\right],$$

$$\frac{d\varphi}{dx} = -2b\left[\frac{f_1(u)\,dy'}{du} - y'.f'_1(u)\right],$$

$$\frac{d\varphi}{d\left(\frac{1}{y'}\right)} = -y'^2\cdot\frac{d\varphi}{dy'} = -\frac{2b.y'.f_1(u)\,dy}{du},$$

d'où l'on aura

$$\frac{d\varphi}{dx} : \frac{d\varphi}{d\left(\frac{1}{y'}\right)} = \frac{1}{dy}\left[\frac{dy'}{y'} - \frac{d.f_1(u)}{f_1(u)}\right],$$

et en vertu de l'équation (99) le facteur cherché

$$\mathfrak{M}_1 = \frac{y'}{f_1(u)}.$$

L'intégrale dont il s'agit devient donc

$$\text{const.} = \int\frac{dy - y'dx}{f_1(u)} = \int\frac{du}{f_1(u)} - 2\int\frac{y'dz}{f_1(u)}.$$

D'ailleurs en vertu de l'équation (184) on aura

(185 *bis*)
$$\frac{y'}{f_1(u)} = \frac{1}{f(z)},$$

d'où, en posant, pour abréger,

$$\int\frac{du}{f_1(u)} = F_1(u), \qquad \int\frac{dz}{f(z)} = F(z),$$

on aura enfin

(186)
$$F_1(y'^2 + 2by + a) - 2F(y' + bx) = \text{const.}$$

L'élimination de y' entre cette formule et l'équation proposée (184) donnera l'intégrale générale de celle-ci.

Observation I. — En multipliant la première des équations (185) par l'équation (185 *bis*), on obtiendra immédiatement la formule (186).

§ XXXV.

EXEMPLE XVII.

Trouver l'intégrale générale de l'équation différentielle

$$(187)\qquad y'^2 + axy' - ay = y'.f\left(\frac{y'^2+ay}{y'^r}\right).$$

Faisons, pour abréger,

$$u = \frac{y'^2+ay}{(y')^r},$$

d'où l'on aura

$$\frac{du}{dx} = \frac{ay'^2 + [(2-r)y'^2 - ary]y''}{(y')^{r+1}},$$

$$\frac{du}{dy'} = \frac{(2-r)y'^2 - ary}{(y')^{r+1}}.$$

En différentiant l'équation (187), qu'on pourra écrire de cette manière

$$(187\ bis)\qquad f(u) - y' + a\cdot\frac{y}{y'} - ax = 0,$$

on aura

$$(188)\qquad f'(u) = \frac{(y'^2+ay).y''}{(y')^{1-r}.\{ay'^2+[(2-r)y'^2-ary]y''\}}.$$

Pour trouver, à l'aide du théorème X, le facteur propre à l'intégration, nous observons qu'on a ici

$$\varphi = f(u) - y' + a\cdot\frac{y}{y'} - ax,$$

d'où, à l'aide de l'équation (188),

$$\frac{d\varphi}{dx} = -a,$$

$$\frac{d\varphi}{d\left(\frac{1}{y'}\right)} = \frac{ay'^2(ay+y'^2)}{ay'^2+[(2-r)y'^2-ary].y''}.$$

On en conclura

$$\frac{d\varphi}{dx} : \frac{d\varphi}{d\left(\frac{1}{y'}\right)} = -\frac{ay'^2 + [(2-r)y'^2 - ary]y''}{y'^2(ay+y'^2)} = \frac{r.\operatorname{d}\log y'}{dy} - \frac{\operatorname{d}\log(ay+y'^2)}{dy},$$

et partant, en vertu de l'équation (96), on aura le facteur propre à l'intégration

$$\mathfrak{M}_1 = \frac{ay'^r}{ay+y'^2},$$

et l'intégrale cherchée

$$(189) \qquad \text{const.} = \int \frac{(y')^{r-1}.a}{ay+y'^2}(dy - y'dx).$$

D'ailleurs on obtiendra par l'équation (187)

$$a(y - xy') = y'^2 - y'.f(u),$$

d'où, en différentiant,

$$a(dy - y'dx) = \frac{y'^2+ay}{y'}dy' - y'.f'(u).du,$$

ce qui, substitué dans l'équation (189), donnera

$$\text{const.} = \int (y')^{r-2}.dy' - \int \frac{f'(u)}{u}du,$$

ou, ce qui revient au même,

$$(190) \qquad \frac{(y')^{r-1}}{r-1} - F\left(\frac{y'^2+ay}{(y')^r}\right) = \text{const.},$$

en posant, pour abréger,

$$\int \frac{f'(u)}{u}du = F(u).$$

L'élimination de y' entre l'équation (190) et l'équation différentielle proposée donnera enfin l'intégrale générale de celle-ci.

Observation I. — Si l'on a $r = 1$, il faut remplacer $\frac{(y')^{r-1}}{r-1}$ par $\log y'$.

Observation II. — En posant

$$z = y'^2 + axy' - ay,$$
$$u = \frac{y'^2 + ay}{(y')^r},$$

on obtiendra sans difficulté

(190 *bis*) $$y'\,\mathrm{d}z - z\,\mathrm{d}y' = y'^r . u\,\mathrm{d}y'.$$

En différentiant l'équation (187), on aura

$$\frac{y'\,\mathrm{d}z - z\,\mathrm{d}y'}{y'} = y' . f'(u)\,\mathrm{d}u,$$

et à l'aide de l'équation (190 *bis*)

$$(y')^{r-2}\,\mathrm{d}y' - \frac{f'(u)\,\mathrm{d}u}{u} = 0,$$

ce qui donne immédiatement la formule (190).

§ XXXVI.

EXEMPLE XVIII.

Trouver l'intégrale générale de l'équation différentielle

(191) $$\frac{ax + by + yy'}{\sqrt{a + by' + y'^2}} = f\left(\frac{xy' - y}{\sqrt{a + by' + y'^2}}\right).$$

Faisons, pour abréger,

(192) $$m = ax + by + yy',$$

(193) $$n = xy' - y,$$

(194) $$r = \sqrt{a + by' + y'^2},$$

d'où il viendra

$$m' = r^2 + yy'',$$
$$n' = xy'',$$
$$r' = \frac{(b+2y')\,y''}{2r},$$

et de plus

(195) $$2m' + bn' = 2r^2 + (bx + 2y)\,y''.$$

En différentiant l'équation (191) ou, ce qui revient au même.

(196) $$r.f\left(\frac{n}{r}\right) - m = 0,$$

on trouvera sans difficulté

(197) $$f'\left(\frac{n}{r}\right) = \frac{2r^4 - (bm + 2an)\,y''}{y''\,(2m + bn)}.$$

Allons à présent chercher, à l'aide du théorème IX, le facteur propre à l'intégration ; on a ici

$$\varphi = r.f\left(\frac{n}{r}\right) - m,$$

et, par une différentiation partielle,

$$\frac{d\varphi}{dy} = -\left[y' + b + f'\left(\frac{n}{r}\right)\right],$$
$$\frac{d\varphi}{dy'} = \frac{b+2y'}{2r}\cdot f\left(\frac{n}{r}\right) + \frac{(2m+bn)}{2r^2}\cdot f'\left(\frac{n}{r}\right) - y.$$

En substituant ici, à l'aide des formules (196) et (197), les valeurs de $f\left(\frac{n}{r}\right)$ et $f'\left(\frac{n}{r}\right)$, on obtiendra

$$\frac{d\varphi}{dy} = -\frac{2r^4 + y''[(b+y')(2m+bn) - bm - 2an]}{y''(2m+bn)} = -\frac{r^2[2r^2 + y''(bx + 2y)]}{y''(2m+bn)},$$
$$\frac{d\varphi}{dy'} = \frac{r^2}{y''},$$

d'où, à l'aide de l'équation (195),

$$\frac{d\varphi}{dy} : \frac{d\varphi}{dy'} = -\frac{2m' + bn'}{2m + bn} = -\frac{d.\log(2m+bn)}{dx}.$$

En vertu de l'équation (96) on aura donc le facteur propre à l'intégration

$$\mathfrak{M} = \frac{1}{2m+bn},$$

et l'intégrale cherchée

(198) $$\text{const.} = \int \frac{dy - y'\,dx}{2m+bn}.$$

D'ailleurs, à cause de

$$dy - y'\,dx = \frac{(2m+bn)\,dy'}{2r^3} - d\left(\frac{n}{r}\right),$$

on aura

(199) $$r.\frac{dy - y'\,dx}{2m+bn} = \frac{dy'}{2r^2} - \frac{r\,d\left(\frac{n}{r}\right)}{2m+bn};$$

en ayant de plus de l'équation (196)

$$\frac{2m+bn}{r} = 2.f\left(\frac{n}{r}\right) + \frac{bn}{r},$$

nous conclurons, en vertu des formules (198) et (199),

$$\text{const.} = \int \frac{dy'}{2r^2} - \int \frac{d\left(\frac{n}{r}\right)}{\frac{bn}{r} + 2f\left(\frac{n}{r}\right)},$$

ou, ce qui revient au même,

(200) $$\frac{1}{2}.\int \frac{dy'}{a + by' + y'^2} - F\left(\frac{xy' - y}{\sqrt{n + by' + y'^2}}\right) = \text{const.},$$

en posant, pour abréger,

$$\int \frac{dz}{bz + 2f(z)} = F(z).$$

L'élimination de y' entre l'équation (200) et l'équation différentielle proposée donnera enfin l'intégrale générale de celle-ci.

Observation I. — Pour $b = 0$, $a = 1$, la formule (200) rendra l'intégrale déjà trouvée dans l'exemple VI.

§ XXXVII.

EXEMPLE XIX.

Trouver l'intégrale générale de l'équation différentielle

(201) $$\frac{ax + by + yy'}{\sqrt{a + by' + y'^2}} = f(y^2 + bxy + ax^2).$$

Soient m, n et r les mêmes que dans les formules (192), (193) et (194), et faisons

$$t = y^2 + bxy + ax^2,$$

d'où

(202) $$\mathrm{d}t = (2y + bx)\,\mathrm{d}y + (by + 2ax)\,\mathrm{d}x.$$

La formule (201), qu'on pourra écrire de cette manière,

(203) $$\frac{m}{r} - f(t) = 0,$$

donne, en la différentiant,

$$f'(t) = \frac{2r^4 - (bm + 2an)\,y''}{2r^3\,(2m + bn)}.$$

Pour trouver, à l'aide du théorème IX, le facteur propre à l'intégration, on a ici

$$\varphi = \frac{m}{r} - f(t),$$

d'où, après quelques réductions très-faciles, on conclura

$$\frac{d\varphi}{\mathrm{d}y} = \frac{(bm + 2an)\,[2r^2 + y''(2y + bx)]}{2r^3\,(2m + bn)}, \qquad \frac{d\varphi}{\mathrm{d}y'} = -\frac{bm + 2an}{2r^3},$$

et partant

$$\frac{d\varphi}{dy} : \frac{d\varphi}{dy'} = -\frac{2x^2 + (bx + 2y)y''}{2m + bn} = -\frac{2m' + bn'}{2m + bn}.$$

En vertu de l'équation (96) on aura donc le facteur propre à l'intégration

$$\mathfrak{M} = \frac{1}{2m + bn},$$

et l'intégrale cherchée

$$\text{const.} = \int \frac{dy - y'\,dx}{2m + bn}.$$

Faisons, pour abréger,

$$d\varpi = \frac{dy - y'\,dx}{2m + bn};$$

multiplions cette formule par 2 et retranchons-en

$$\frac{x^2 . d\left(\frac{y}{x}\right)}{t} = \frac{x\,dy - y\,dx}{t}.$$

on obtiendra identiquement

$$(204) \qquad 2\,d\varpi - \frac{x^2 . d\left(\frac{y}{x}\right)}{t} = -\frac{n\,dt}{t(2m + bn)} = -\frac{dt}{t\left(b + \frac{2m}{n}\right)}.$$

D'ailleurs on trouvera sans difficulté que

$$m^2 + bmn + an^2 = r^2 t,$$

d'où, à l'aide de l'équation (203), on conclura

$$b + \frac{2m}{n} = \left(\frac{bt}{[f(t)]^2} \pm \sqrt{b^2 - 4a + \frac{4at}{[f(t)]^2}}\right) : \left(\frac{t}{[f(t)]^2} - 1\right)$$

et partant

$$\frac{dt}{t\left(b+\frac{2m}{n}\right)}=\frac{\{t-[f(t)]^2\}\,dt}{t\{bt\pm f(t).\sqrt{4at+(b^2-4a).[f(t)]^2}\}},$$

ce qui, substitué dans l'équation (204), donnera en intégrant

$$\text{const.}=\int\frac{d\left(\frac{y}{x}\right)}{a+b\left(\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{y}{x}\right)^2}-\int\frac{\{t-[f(t)^2\}\,dt}{t\{bt\pm f(t).\sqrt{4at+(b^2-4a).[f(t)]^2}\}}$$

ou, ce qui revient au même,

$$(205)\qquad \int\frac{d\left(\frac{y}{x}\right)}{a+b\left(\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{y}{x}\right)^2}-F(y^2+bxy+ax^2)=\text{const.},$$

en posant

$$\int\frac{\{t-[f(t)]^2\}\,dt}{t\{bt\pm f(t).\sqrt{4at+(b^2-4a).[f(t)]^2}\}}=F(t).$$

L'élimination de y' entre l'équation (205) et l'équation différentielle proposée donnera l'intégrale générale de celle-ci.

Observation I. — Pour $a=1$, $b=0$, la formule (205) nous rendra l'intégrale trouvée dans le corollaire de l'exemple V.

§ XXXVIII.

EXEMPLE XX.

Trouver l'intégrale générale de l'équation différentielle

$$(206)\qquad \frac{xy'-y}{(y'+\alpha)^{1-r}.(y'+\beta)^r}=f[(y+\alpha x)^r.(y+\beta x)^{1-r}].$$

Faisons, pour abréger,

(207) $$u = (y' + \alpha)^{1-r} \cdot (y' + \beta)^r.$$

(208) $$\left\{ \begin{array}{l} v = (y + \alpha x)^r \cdot (y + \beta x)^{1-r}, \\ n = xy' - y. \end{array} \right.$$

L'équation (206), qu'on poura écrire de cette manière,

(209) $$\frac{n}{u} - f(v) = 0,$$

donnera, en la différentiant,

(210) $$\frac{d\left(\frac{n}{u}\right)}{dx} = f'(v) \cdot v'.$$

D'ailleurs on conclura des équations (207) et (208)

(211) $$\frac{u'}{u} = \frac{y''(y' + \gamma)}{(y' + \alpha)(y' + \beta)},$$

(212) $$\frac{v'}{v} = \frac{yy' + \delta xy' + \gamma y + \alpha\beta x}{(y + \alpha x)(y + \beta x)},$$

en posant

(213) $$\left\{ \begin{array}{l} \gamma = r\alpha + (1 - r)\beta, \\ \delta = r\beta + (1 - r)\alpha. \end{array} \right.$$

En substituant dans l'équation (210) la valeur de v', on obtiendra

$$\frac{d\left(\frac{n}{u}\right)}{dx} = \frac{v \cdot f'(v)(yy' + \delta xy' + \gamma y + \alpha\beta x)}{(y + \alpha x)(y + \beta x)},$$

d'où, la différentiation indiquée étant effectuée, on tirera, à l'aide des équations (211) et (213),

(214) $$v \cdot f'(v) = \frac{y''}{u} \cdot \frac{(y + \alpha x)(y + \beta x)}{(y' + \alpha)(y' + \beta)}.$$

Nous allons à présent chercher, à l'aide du théorème IX, le facteur propre à l'intégration. Nous observons en premier lieu qu'on a ici

$$\varphi = \frac{n}{u} - f(v),$$

d'où, à l'aide de l'équation (214),

$$\frac{d\varphi}{dy} = -\left[\frac{1}{u} + \frac{v.f'(v).(y+\delta x)}{(y+\alpha x)(y+\beta x)}\right] = -\frac{(y'+\alpha)(y'+\beta)+y''(y+\delta x)}{u.(y'+\alpha)(y'+\beta)},$$

$$\frac{d\varphi}{dy'} = \frac{yy'+\delta xy'+\gamma y+\alpha\beta x}{u(y'+\alpha)(y'+\beta)},$$

et partant

$$\frac{d\varphi}{dy} : \frac{d\varphi}{dy'} = -\frac{(y'+\alpha)(y'+\beta)+y''(y+\delta x)}{yy'+\delta xy'+\gamma y+\alpha\beta x},$$

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{d\varphi}{dy} : \frac{d\varphi}{dy'} = -\frac{d.\log(yy'+\delta xy'+\gamma y+\alpha\beta x)}{dx},$$

à cause de

$$\alpha + \beta = \gamma + \delta.$$

En vertu de l'équation (96), on aura donc le facteur propre à l'intégration

$$\mathfrak{M} = \frac{1}{yy'+\delta xy'+\gamma y+\alpha\beta x},$$

et l'intégrale cherchée

$$(215) \qquad \text{const.} = \int \frac{dy - y'dx}{yy'+\delta xy'+\gamma y+\alpha\beta x}.$$

Or, pour effectuer l'intégration indiquée, qui se réduira nécessairement à des quadratures, faisons, pour abréger,

$$d\mathfrak{S} = \frac{dy - y'dx}{yy'+\delta xy'+\gamma y+\alpha\beta x}.$$

La formule (212), multipliée par

$$(y + \beta x)(y' + \alpha)\,dx = (y + \beta x)(dy + \alpha\,dx),$$

donnera

$$(y' + \alpha)(y + \beta x)\cdot\frac{dv}{v} - \frac{yy' + \delta xy' + \gamma y + \alpha\beta x}{y + \alpha x}\cdot(dy + \alpha\,dx) = 0,$$

d'où, en ajoutant,

$$0 = dy - y'\,dx,$$

et en divisant par

$$yy' + \delta xy' + \gamma y + \alpha\beta x,$$

on conclura facilement

$$(216)\qquad d\varpi = \frac{(y' + \alpha)(y + \beta x)}{yy' + \delta xy' + \gamma y + \alpha\beta x}\cdot\frac{dv}{v} - \frac{dy + \alpha\,dx}{y + \alpha x}.$$

En vertu des équations (215) et (216) on aura donc

$$(217)\qquad \text{const.} = \int\frac{(y' + \alpha)(y + \beta x)}{yy' + \delta xy' + \gamma y + \alpha\beta x}\cdot\frac{dv}{v} - \log(y + \alpha x).$$

D'ailleurs, en ayant eu vertu de l'équation (213)

$$yy' + \delta xy' + \gamma y + \alpha\beta x = r(y' + \alpha)(y + \beta x) + (1 - r)(y' + \beta)(y + \alpha x),$$

on pourra écrire la formule (217) de cette manière :

$$(218)\qquad \int\frac{1}{r + (1 - r)w}\cdot\frac{dv}{v} - \log(y + \alpha x) = \text{const.},$$

en posant, pour abréger,

$$(219)\qquad w = \frac{(y' + \beta)(y + \alpha x)}{(y' + \alpha)(y + \beta x)}.$$

Il ne reste à présent qu'à trouver l'expression de w en v. Pour cela nous observons que la formule (219) donnera, en vertu de l'équa-

tion (208),

$$w^r = \left(\frac{y'+\beta}{y'+\alpha}\right)^r \cdot \frac{v}{y+\beta x},$$

d'où, à l'aide de l'équation (207), on aura

$$(220) \qquad w^r = \frac{u \cdot v}{(y'+\alpha)(y+\beta x)}.$$

D'ailleurs on obtiendra pareillement de l'équation (219)

$$w - 1 = \frac{(\alpha-\beta) \cdot u}{(y'+\alpha)(y+\beta x)},$$

d'où, en divisant par l'équation (220), on aura, à l'aide de l'équation (209),

$$(221) \qquad \frac{w-1}{w^r} = (\alpha-\beta) \cdot \frac{f(v)}{v}.$$

La résolution de cette équation donnera w en fonction de v; donc, en posant

$$\int \frac{1}{r+(1-r)w} \cdot \frac{dv}{v} = F_1(v),$$

l'intégrale cherchée devient, en vertu de l'équation (218),

$$(222) \quad F_1[(y+\alpha x)^r \cdot (y+\beta x)^{1-r}] - \log(y+\alpha x) = \text{const.}$$

Cela étant ainsi, on pourra sans difficulté présenter la meme intégrale sous une autre forme. En effet, les formules (208) et (219) nous enseignent qu'en permutant α et β, et en même temps remplaçant r par $1-r$, l'expression v restera la même, et w se changera en $\frac{1}{w}$. En posant donc, pour abréger,

$$\int \frac{w}{r+(1-r)w} \cdot \frac{dv}{v} = F_2(v),$$

on pourra écrire l'intégrale dont il s'agit sous la forme

$$F_2[(y+\alpha x)^r \cdot (y+\beta x)^{1-r}] - \log(y+\beta x) = \text{const.}$$

En retranchant cette formule de l'équation (222), et en observant que

$$\log\left(\frac{y+\beta x}{y+\alpha x}\right)=\int\left(\frac{dy+\beta dx}{y+\beta x}-\frac{dy+\alpha dx}{y+\alpha x}\right)=(\alpha-\beta).\int\frac{d\left(\frac{y}{x}\right)}{\left(\frac{y}{x}+\alpha\right)\left(\frac{y}{x}+\beta\right)},$$

l'intégrale cherchée prendra cette forme plus symétrique

$$(223)\quad F[(y+\alpha x)^r.(y+\beta x)^{1-r}]+(\alpha-\beta).\int\frac{d\left(\frac{y}{x}\right)}{\left(\frac{y}{x}+\alpha\right)\left(\frac{y}{x}+\beta\right)}=\text{const.},$$

ayant posé, pour abréger,

$$(224)\qquad F_1(v)-F_2(v)=\int\frac{1-w}{r+(1-r)w}\cdot\frac{dv}{v}=F(v),$$

w étant donné en fonction de v par la formule (221).

Corollaire. — Pour $r=\frac{1}{2}$, en posant

$$\alpha+\beta=b\quad\text{et}\quad\alpha\beta=a,$$

d'où

$$\alpha-\beta=\sqrt{b^2-4a},$$

on aura par l'équation (208)

$$(225)\qquad v^2=y^2+bxy+ax^2=z.$$

et par l'équation (221)

$$\frac{1-w}{1+w}=\frac{\sqrt{b^2-4a}\;f(\sqrt{z})}{\sqrt{4z+(b^2-4a).[f(\sqrt{z})]^2}}.$$

En mettant $f(z)$ à la place de $f(\sqrt{z})$ et en posant

$$\int\frac{f(z).dz}{z\sqrt{4z+(b^2-4a).[f(z)]^2}}=F(z).$$

nous obtiendrons, en vertu des équations (223) et (224),

$$(226)\qquad F(y^2 + bxy + ax^2) + \int \frac{d\left(\frac{y}{x}\right)}{a + b\left(\frac{y}{x}\right) + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = \text{const.}$$

comme l'intégrale générale de l'équation différentielle

$$\frac{xy' - y}{\sqrt{a + by' + y'^2}} = f(y^2 + bxy + ax^2).$$

Observation. — Pour $b = 0$, $a = 1$, la formule (226) nous rendra immédiatement l'intégrale trouvée dans l'exemple V.

EXTRAIT D'UNE LETTRE DE M. LIOUVILLE A M. BESGE.

« .... Puisque vous vous intéressez aux formules concernant les » sommes de diviseurs des nombres (formules qu'il est au surplus » bien facile maintenant de multiplier), je vous communiquerai un » théorème qu'on déduit de l'équation marquée (φ) dans mon dou- » zième article *sur quelques formules générales* [*], en y faisant, » comme on en a le droit, $F(x, y, z) = xyz$.

» Soit m un nombre entier donné quelconque. Représentons à » notre ordinaire par $\zeta_1(n)$ la somme des diviseurs de chaque entier » n; et considérons la somme

$$m\zeta_1(m) + 2\sum(m - 5m'^2)\zeta_1(m - m'^2)$$

» que nous désignerons par S et où le signe $\sum$ porte sur m' dont les » valeurs successives sont 1, 2, 3, 4,..., en s'arrêtant au moment où » la quantité placée sous le signe ζ_1 deviendrait nulle ou négative, de » sorte que m' vérifie toujours l'inégalité

$$m - m'^2 > 0.$$

» Cela posé, notre théorème consiste en ce que l'on a

$$S = 0$$

» quand m n'est pas un carré, mais

$$S = \frac{m(4m - 1)}{3}$$

» quand m est un carré.

[*] Cahier de janvier 1860.

» Ainsi, pour $m = 17$, la somme S, qui est alors exprimée par

$$17\zeta_1(17) + 2(17 - 5.1^2)\zeta_1(16) + 2(17 - 5.2^2)\zeta_1(13) \\ + 2(17 - 5.3^2)\zeta_1(8) + 2(17 - 5.4^2)\zeta_1(1),$$

» se réduit à zéro, comme on le verra sans peine en observant que

$$\zeta_1(17) = 18,\quad \zeta_1(16) = 31,\quad \zeta_1(13) = 14,\quad \zeta_1(8) = 15,\quad \zeta_1(1) = 1.$$

» Au contraire, pour $m = 9$, elle deviendra

$$9\zeta_1(9) + 2(9 - 5.1^2)\zeta_1(8) + 2(9 - 5.2^2)\zeta_1(5),$$

» et on la trouvera égale à 105, c'est-à-dire à

$$\frac{9(4.9 - 1)}{3},$$

» conformément à notre théorème, attendu que 9 est un carré. De
» même, pour $m = 16$, on obtiendrait

$$S = \frac{16(4.16 - 1)}{3} = 336.$$

» Mais je ne veux pas insister sur ces vérifications numériques. »

DE

QUELQUES ANALOGIES

DE LA

GEOMÉTRIE DU PLAN A CELLE DE L'ESPACE;

PAR M. PAUL SERRET.

I.

1. Si dans le plan l'on porte bout à bout trois droites perpendiculaires aux côtés d'un triangle et respectivement égales à ces côtés, le circuit résultant se ferme de lui-même en un second triangle égal au premier et dès lors de même surface.

De même, dans l'espace, si l'on porte bout à bout quatre droites perpendiculaires aux faces d'un tétraèdre ABCD et respectivement proportionnelles aux aires de ces faces, le circuit résultant se ferme de lui-même (proposition connue) en un quadrilatère gauche A'B'C'D' ou en un second tétraèdre de même nom et des mêmes sommets : et *l'on a, entre les volumes de ces deux tétraèdres* orthogonaux, *la relation*

$$V' = kV^2,$$

où k désigne une constante.

2. *Les trois angles des arêtes opposées du tétraèdre primitif* ABCD *servent de mesure aux trois dièdres* diagonaux *du quadrilatère orthogonal* A'B'C'D'; les deux premiers de ces dièdres n'ayant pas besoin de définition, et le troisième ayant chacune de ses faces parallèle à deux côtés opposés du quadrilatère A'B'C'D' et son arête parallèle à la droite des milieux des diagonales.

Corollaire. — *Si deux des trois dièdres diagonaux du quadrilatère orthogonal* A′B′C′D′ *sont droits, il en est de même du troisième, et les arêtes opposées du tétraèdre primitif sont perpendiculaires entre elles.*

3. *Les aires des faces du tétraèdre orthogonal* A′B′C′D′ *sont proportionnelles à quatre arêtes consécutives du tétraèdre primitif* ABCD, *et les plans de ces faces sont perpendiculaires à ces arêtes.*

Corollaire. — Deux tétraèdres orthogonaux sont *réciproques.*

4. Problème. — *Les aires des quatre faces étant données, définir le tétraèdre maximum.* (Lagrange.)

Soient ABCD le tétraèdre cherché et A′B′C′D′ son tétraèdre orthogonal. Les aires des faces du premier étant données et son volume étant maximum, les quatre arêtes consécutives A′B′, B′C′, C′D′, D′A′ du second sont aussi données; son volume V′ est maximum (n° 1); et le problème est ramené à celui-ci, beaucoup plus facile : *Définir le tétraèdre maximum* A′B′C′D′ *parmi tous ceux que l'on peut construire avec quatre arêtes consécutives de longueurs données.* Or, sous ces nouvelles conditions, il devient évident que le tétraèdre maximum A′B′C′D′ est celui dont les *dièdres diagonaux* A′C′, B′D′ sont *droits.* En effet, si le dièdre A′C′ n'était droit, on pourrait, en laissant invariables les triangles A′B′C′ et A′D′C′ dans leurs plans respectifs, amener le plan du second à être perpendiculaire au plan du premier par une rotation effectuée autour de la diagonale fixe A′C′. Par là, la base A′B′C′ du tétraèdre ne changerait point, mais sa hauteur et son volume augmenteraient. Donc, etc. D'ailleurs les dièdres diagonaux du tétraèdre orthogonal A′B′C′D′ étant droits, *les arêtes opposées du tétraèdre primitif* ABCD *sont perpendiculaires entre elles.* Et cette définition géométrique du tétraèdre maximum résulte aussi des équations données par Lagrange.

Si l'on désigne en effet par a, b, c les côtés de la base ABC, et par a', b', c' les arêtes opposées à ces côtés, le tétraèdre maximum est défini, suivant l'illustre géomètre, par ces égalités (*Mémoires de l'Académie de Berlin,* 1773, p. 160)

$$(1)\qquad a^2 - b'^2 - c'^2 = b^2 - c'^2 - a'^2 = c^2 - a'^2 - b'^2.$$

ou, avec moins de symétrie, par les suivantes,

$$(1')\quad a^2 - b^2 = b'^2 - a'^2,\quad b^2 - c^2 = c'^2 - b'^2,\quad c^2 - a^2 = a'^2 - c'^2;$$

et ces dernières expriment, suivant une remarque due à Lhuillier, que, dans le tétraèdre cherché, le pied de chacune des hauteurs sur la face opposée coïncide avec le point de rencontre des hauteurs de cette face (*De Relatione mutua, etc.*, 1782, p. 151). Une seconde interprétation équivalente, mais plus immédiate encore, des équations (1′) est celle-ci: Les perpendiculaires abaissées de deux sommets quelconques du tétraèdre maximum sur l'arête qui réunit les deux autres sommets, coupent cette arête au même point, et par suite les arêtes opposées du tétraèdre maximum sont perpendiculaires entre elles; propriété déjà énoncée par M. Painvin.

5. La notion du tétraèdre orthogonal permet de démontrer simplement ce théorème connu : Le tétraèdre maximum, parmi ceux qui ont la même surface totale, est le tétraèdre régulier.

En effet le périmètre total du quadrilatère conjugué A′B′C′D′ est maintenant donné; et pour que le volume du tétraèdre de même nom soit maximum, il faut d'abord que ses dièdres diagonaux soient droits, comme précédemment; ensuite que ses arêtes consécutives A′B′, B′C′, C′D′, D′A′ soient égales entre elles, cette dernière condition résultant d'une propriété de maximum du triangle isocèle. Les arêtes opposées du tétraèdre primitif ABCD sont donc perpendiculaires entre elles, et toutes ses faces sont *équivalentes*. Or il est aisé de voir que la combinaison de ces deux conditions entraîne successivement l'*égalité* des faces et celle des arêtes, ou la régularité du tétraèdre.

6. De tous les tétraèdres construits sur une base donnée et de même surface totale, le tétraèdre maximum est celui dont les faces latérales sont également inclinées sur la base : théorème dû à Lhuillier, et dont la démonstration est également facile par l'analyse ou la géométrie. Il en résulte, par l'emploi du tétraèdre orthogonal, cet autre théorème : De tous les quadrilatères gauches construits sur un côté donné et sous un périmètre total également donné, celui qui donne

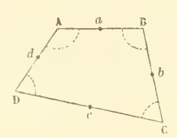
naissance à un tétraèdre maximum est tel, que les trois côtés libres b, c, d, soient également inclinés sur le côté donné a.

II.

1. L'équation générale des surfaces du second degré S_2, tangentes aux quatre côtés d'un quadrilatère gauche ABCD, est

(1) $$(aA + bB + cC + dD)^2 + \lambda.AC + \mu.BD = 0,$$


Fig. 1.



a, b, c, d, λ, μ désignant six paramètres arbitraires, et les plans des quatre angles A, B, C, D du quadrilatère étant représentés par les équations

$$0 = A = B = C = D.$$

Si l'on cherche en effet les traces du côté AB ($A = 0$, $B = 0$) sur la surface (1), on trouve deux traces confondues en une seule :

$$A = 0, \quad B = 0, \quad (cC + dD)^2 = 0.$$

Chacun des côtés du quadrilatère est donc tangent à la surface (1), et celle-ci renferme en outre le nombre convenable de paramètres arbitraires.

D'ailleurs le point de contact a du côté AB étant défini par les équations simultanées

$$A = 0, \quad B = 0, \quad cC + dD = 0,$$

ce point appartient au plan

(2) $$aA + bB + cC + dD = 0;$$

il en est de même des points de contact b, c, d des autres côtés du quadrilatère; et l'on voit que : *Dans tout quadrilatère gauche circonscrit à une surface du second degré, les points de contact des côtés appartiennent à un même plan.*

Le théorème segmentaire de Newton, et celui de Carnot sur les polygones gauches coupés par un plan transversal, conduisent aisément au même résultat; c'est même ainsi que cette proposition, qui nous avait paru nouvelle, a été établie d'abord par Brianchon. (Voir *Propriétés projectives.*)

2. Considérons l'hyperboloïde à une nappe représenté par l'équation

$$(3) \qquad \lambda.\mathrm{AC} + \mu.\mathrm{BD} = 0.$$

Cet hyperboloïde, comme on sait, passe par les quatre côtés du quadrilatère gauche ABCD; et il résulte, de la forme des équations (1) et (3), qu'il est circonscrit à la surface (1) suivant la courbe (2). On pourra donc mener, par chaque point m de cette courbe, une génératrice du second système de l'hyperboloïde, tangente en m à la surface (1), s'appuyant sur les deux génératrices fixes AB, CD du premier système, et déterminant dès lors, sur celles-ci, des divisions homographiques.

De là, en considérant les génératrices de l'hyperboloïde sous un autre point de vue, et les regardant comme celles des tangentes à la surface (1) qui s'appuient sur les deux tangentes fixes AB, CD de cette même surface, on déduit ce théorème :

Étant données deux tangentes fixes d'une surface du second degré, les tangentes de cette surface qui rencontrent les deux premières, déterminent sur celles-ci deux divisions homographiques; leurs points de contact sur la surface sont distribués sur une courbe plane, et ces droites sont les génératrices d'un hyperboloïde circonscrit à la proposée.

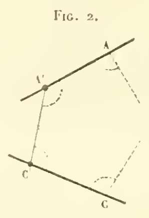
Remarque. — Étant données les deux tangentes fixes AB, CD, si l'on prend un point quelconque A de l'une d'elles pour sommet d'un cône circonscrit à la surface, et que l'on construise les traces de la seconde tangente CD sur ce cône : l'on aura, en général, deux traces

D, D′; et, par suite aussi, deux droites distinctes AD, AD′, s'appuyant sur les deux directrices données, et tangentes à la surface. Dès lors, si le point A se meut sur la directrice AB, les deux droites AD, AD′ engendreront deux hyperboloïdes distincts, circonscrits à la surface proposée suivant deux courbes distinctes. C'est ce qui résultera d'ailleurs, avec plus de clarté, du calcul suivant.

5. PROBLÈME. — *Étant données deux tangentes* AA′, CC′, *d'une surface du second degré, trouver la surface engendrée par une droite qui se meut en demeurant tangente à la surface donnée, et s'appuyant toujours sur les deux tangentes données.*

Chacune des deux tangentes données AA′, CC′ devant être définie par deux plans, nous ferons passer, par AA′, un plan quelconque $A = 0$;

Fig. 2.



par CC′, un plan quelconque $C = 0$; et, pour les deux autres plans nécessaires à la détermination de ces droites, nous choisirons les plans $A' = 0$, $C' = 0$, menés par chacune d'elles et par la droite A′C′ qui réunit leurs points de contact sur la surface, dont l'équation est dès lors

$$(1)\qquad A(cC + c'C') + A'(\gamma C + \gamma' C') + \lambda A'^2 + \mu C'^2 = 0.$$

Une droite quelconque, s'appuyant sur les deux directrices données, sera représentée par les équations

$$(2)\qquad \begin{cases} A = mA', \\ C = nC', \end{cases}$$

et l'élimination des fonctions A et C entre (1) et (2) conduit à l'équation

$$(3)\qquad \lambda A'^2 + A'C'[m(nc+c') + n\gamma + \gamma'] + \mu C'^2 = 0,$$

dont le premier membre sera un carré parfait en A' et C', si la droite (2) est tangente à la surface (1). Les paramètres variables m et n des équations de la génératrice mobile sont donc liés par la relation

$$(4)\qquad cmn + c'm + \gamma n + \gamma' = \pm\sqrt{\lambda\mu},$$

et l'élimination de ces paramètres entre (2) et (4) donne

$$cAC + c'AC' + \gamma CA' + \gamma' A'C' = \pm 2A'C'\sqrt{\lambda\mu}$$

ou

$$(5)\qquad A(cC + c'C') + A'(\gamma C + \gamma' C') \pm 2A'C'\sqrt{\lambda\mu} = 0$$

pour équation de la surface cherchée. Cette surface se compose donc du système de deux hyperboloïdes, circonscrits l'un et l'autre à la surface proposée suivant deux courbes de contact, dont les plans se coupent suivant la droite A'C'.

Remarque. — Il résulte, de ce dédoublement de la surface totale en deux hyperboloïdes, que le théorème du n° 1 n'est pas vrai d'une manière absolue. Ainsi, le quadrilatère gauche ABCD étant circonscrit à une surface du second degré, le point de contact du quatrième côté AD appartiendra ou non au plan mené par les points de contact des trois premiers côtés, suivant que les côtés opposés AD et BC seront deux génératrices d'un même hyperboloïde, ou des génératrices de l'un et de l'autre hyperboloïdes. Mais si le dernier cas a lieu, l'on pourra toujours fermer le quadrilatère gauche par une quatrième tangente AD', issue du point A, et dont le point de contact d' appartiendra nécessairement au plan déterminé par les points de contact des trois premiers côtés.

4. Le théorème 1, ainsi rectifié, pourrait être pris pour point de départ dans l'étude des polygones gauches circonscrits à une surface du second degré. Nous nous bornerons, sur ce point, à énoncer les deux propositions suivantes:

1° Si les points de contact des côtés d'un polygone *impair*, circonscrit à une surface du second degré, appartiennent à un même plan, le polygone lui-même est plan.

2° Si les points de contact des côtés d'un polygone de $4m+2$ sommets, circonscrit à une surface du second degré, appartiennent à un même plan : les diagonales qui réunissent les sommets opposés de ce polygone se coupent en un même point.

III.

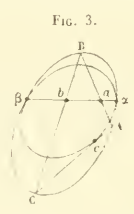
1. *Lemme I.* — Deux courbes quelconques ayant un point commun α, et même tangente en ce point; soit AC une corde variable de la courbe extérieure, tangente en c à la courbe intérieure, et se rapprochant indéfiniment de la tangente commune aux deux courbes : l'on aura, à la limite,

$$\frac{\overline{AC}^2}{4\,Ac\,.\,Cc} = \frac{R}{r},$$

R et r désignant les rayons de courbure, en α, de la ligne enveloppante et de la ligne enveloppée.

2. *Lemme II.* — Soient (C_2) une courbe quelconque du second

Fig. 3.



degré; ABC un triangle pivotant inscrit dans cette courbe; (c_2) la conique, enveloppe du côté libre AC de ce triangle, et doublement tangente à la première aux extrémités α, β de la corde ab des pivots : si l'on désigne par m le rapport anharmonique des quatre points a, b, α, β,

$$\frac{a\alpha\,.\,b\beta}{a\beta\,.\,b\alpha} = m,$$

on aura

$$(1) \qquad \frac{R}{r} = \frac{(m+1)^2}{4m}$$

pour le rapport des rayons de courbure des deux lignes, en l'un quelconque de leurs points de contact α ou β.

On a, en effet,

$$\lim \frac{Ac}{Cc} = \lim \frac{Bb.Aa}{Cb.Ba} = \frac{a\alpha.b\beta}{a\beta.b\alpha} = m;$$

et, par suite, ε désignant un infiniment petit,

$$\frac{Ac}{Cc} = m + \varepsilon.$$

On déduit de là

$$AC = Cc(m + 1 + \varepsilon), \quad AC = Ac\frac{m+1+\varepsilon}{m+\varepsilon},$$

et enfin

$$\lim \frac{\overline{AC}^2}{4Ac.Cc} = \frac{(m+1)^2}{4m} = \frac{R}{r},$$

d'après le lemme I.

5. Théorème I. — *L'enveloppe du côté libre d'un triangle pivotant inscrit dans une surface du second degré* S, *est une autre surface du même degré; les deux surfaces ont un double contact suivant la corde* ab *des pivots, et leurs* indicatrices *aux extrémités α et β de cette corde sont des courbes semblables.* De telle sorte que si la première surface est sphérique, les points α et β seront des ombilics de la seconde.

Il est d'abord évident qu'un plan quelconque, mené suivant la droite *ab* ou $\alpha\beta$ des pivots, coupe la surface enveloppe suivant une courbe du second degré $\alpha c\beta$; et que cette courbe est doublement tangente, aux points α et β, à la section ACB déterminée par ce même plan dans la surface donnée.

Pour établir, en second lieu, que toutes les courbes $\alpha c\beta$ appartiennent à une même surface du second degré; considérons trois de ces courbes $\alpha c\beta$, $\alpha c'\beta$, $\alpha c''\beta$, correspondantes aux trois sections $\alpha C\beta$, $\alpha C'\beta$, $\alpha C''\beta$ de la surface donnée S; et la surface du second degré Σ

assujettie à passer par les deux premières courbes et par un point c'' de la troisième. Cette surface Σ se trouve ainsi entièrement déterminée: ses plans tangents aux points α, β coïncident avec ceux de la surface S aux mêmes points; et sa section par le plan $\alpha c''\beta$ est une conique qui passe par les trois points α, β, c'', et dont les tangentes en α, β coïncident avec les tangentes aux mêmes points de la troisième courbe $\alpha c''\beta$. Cette section n'est donc autre chose que la courbe $\alpha c''\beta$ elle-même. Ceci posé, considérons les deux surfaces S, Σ, et leurs *indicatrices* au point commun α: deux ellipses ayant pour centre commun le point α, situées dans le plan tangent commun en ce point, et dont les carrés des diamètres *correspondants* représentent les rayons de courbure des sections normales des deux surfaces.

En vertu du théorème de Meunier, le rapport des rayons de courbure en α des sections obliques $\alpha C\beta$ et $\alpha c\beta$, $\alpha C'\beta$ et $\alpha c'\beta$, $\alpha C''\beta$ et $\alpha c''\beta$ des deux surfaces, sera le même que celui des sections normales correspondantes. Mais les trois premiers rapports sont égaux, suivant le lemme II, et leur valeur commune est

$$\frac{R}{r} = \frac{(m+1)^2}{4m}.$$

L'indicatrice en α de la première surface a donc *trois* de ses diamètres proportionnels aux trois diamètres *correspondants* de l'indicatrice de la seconde surface; et *les deux indicatrices sont des courbes homothétiques* .Or, ce résultat suffit pour établir que toutes les courbes $\alpha c\beta$, en nombre infini, appartiennent à une même surface du second degré. En effet, Σ étant toujours la surface déterminée par les trois courbes $\alpha c\beta$, $\alpha c'\beta$, $\alpha c''\beta$; soit Σ_1 la surface déterminée par une quatrième courbe $\alpha c_1\beta$, et deux des précédentes $\alpha c'\beta$, $\alpha c''\beta$. Cette nouvelle surface Σ_1 et la proposée S auront encore même plan tangent en α, et leurs indicatrices en ce point seront homothétiques, ainsi dès lors que les indicatrices des deux surfaces Σ et Σ_1. Mais ces dernières indicatrices ont déjà deux points communs, à savoir, les extrémités des diamètres correspondants aux deux courbes planes $\alpha c'\beta$, $\alpha c''\beta$, communes aux deux surfaces Σ, Σ_1; donc *celles-ci*, considérées au point α, *ont la même indicatrice;* et *un plan quelconque,* mené par ce point, *les coupe suivant deux courbes osculatrices*. Dès lors les sections des deux surfaces

Σ, Σ_1 par un plan quelconque, mené suivant la droite $\alpha\beta$ des pivots, ont les deux points communs α et β, même tangente et même rayon de courbure en chacun de ces points; donc toutes ces sections coïncident : et toutes les surfaces Σ, Σ_1, ..., que l'on avait supposées distinctes, se confondent.

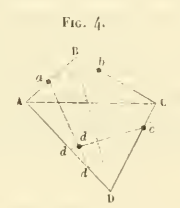
4. *Lemme III.* — Si *les pôles* a, b des deux premiers côtés AB, BC du triangle pivotant ABC *sont deux points conjugués* par rapport à la surface circonscrite; *le côté libre* AC *glisse sur deux droites fixes :* la droite ab des pivots et la polaire $a'b'$ de cette droite.

En effet, l'enveloppe du côté libre AC, considérée dans chacun des plans menés suivant la droite ab, se réduit à un point : le pôle c de la droite des pivots ab. Et tous ces pôles c sont distribués sur la polaire $a'b'$ de la droite ab.

5. Théorème II. — *Si les trois premiers côtés d'un quadrilatère gauche, inscrit à une surface du second degré, tournent autour de trois points fixes,* conjugués harmoniquement deux à deux, *par rapport à la surface : le côté libre du quadrilatère mobile tourne de même autour d'un point fixe; et les pôles des quatre côtés sont les sommets d'un tétraèdre* conjugué.

Soient, en effet a, b, c, d les sommets d'un tétraèdre conjugué, et

Fig. 4.



a, b, c les points fixes sur lesquels tournent les trois premiers côtés AB, BC, CD du quadrilatère gauche ABCD. Menons la diagonale AC. Les deux premiers côtés du triangle ABC tournant sur deux points *conjugués* a et b; le côté libre de ce triangle, ou la diagonale AC, s'appuie constamment, d'après le lemme III, sur la polaire de la droite

ab, c'est-à-dire sur l'arête *cd* du tétraèdre. Les deux droites AC et *cd* étant toujours dans un même plan, il en est de même des deux droites AD et *cd* : et le côté libre du quadrilatère variable s'appuie constamment sur l'arête *cd*. On verrait de même, en menant la diagonale BD, que BD et *ad* sont toujours dans un même plan; qu'il en est encore ainsi de AD et de *ad*, et que le côté libre AD du quadrilatère s'appuie constamment sur l'arête *ad*. Donc le côté libre AD s'appuie constamment sur les deux arêtes *ad* et *cd*. D'ailleurs le côté libre ne peut se mouvoir dans le plan *adc*, puisque, dans ce cas, AB et DC appartiendraient à ce plan, ainsi que la droite BC, ainsi que le point *b*, ce qui n'est pas. Donc le côté libre AD rencontre les arêtes *ad*, *cd* au même point *d*, et tourne ainsi sur le point *d*.

6. L'analogie des théorèmes I et II avec quelques-unes des propositions bien connues que l'on doit à M. Poncelet, semblerait devoir se prolonger au delà, et l'on pourrait très-vraisemblablement conclure de ce qui précède que « l'enveloppe du côté libre d'un polygone gauche pivotant, inscrit dans une surface du second degré, est une autre surface du second degré. » La conclusion pourtant serait fausse, et le problème général des polygones pivotants, inscrits dans une surface du second degré, paraît devoir être restreint, quant à l'unité des résultats, soit aux cas particuliers que nous avons déjà examinés, soit à d'autres cas où l'on établirait des dépendances convenables entre les points fixes autour desquels doivent tourner les premiers côtés du polygone. L'on trouve, en effet, en laissant ces points fixes indépendants les uns des autres, que les côtés libres n'admettent plus une commune définition comme précédemment; mais qu'ils se partagent en une infinité de séries telles que les côtés d'une même série demeurent tangents à une même surface du second degré, cette surface variant d'ailleurs d'une série à l'autre.

Quant aux cas particuliers auxquels nous avons fait allusion, ils sont évidemment susceptibles d'une très-grande variété. Nous citerons pour exemple le cas d'un pentagone gauche dont les quatre premiers côtés tournent sur quatre points situés dans un même plan, et dont le côté libre enveloppe une surface du second degré.

IV.

1. Problème. — *Étant donnés une surface du second degré et un point fixe* O, *l'on conçoit, menées par ce point, trois portions de cordes rectangulaires* OA, OB, OC, *terminées à la surface, et les plans tangents à celle-ci menés par les extrémités de ces cordes : le point de concours de ces plans tangents décrit une surface qu'il s'agit de déterminer.*

Soient

$$(1) \qquad Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0,$$

la surface donnée rapportée à trois axes rectangulaires menés par le point fixe O;

$$(2) \qquad z = ax + by + c,$$

le plan ABC passant par les extrémités des trois cordes rectangulaires OA, OB, OC, et

$$(3) \quad \begin{cases} c^2(Ax^2 + A'y^2 + A''z^2) + 2c(z - ax - by)(Cx + C'y + C''z) \\ \qquad + D(z - ax - by)^2 = 0, \end{cases}$$

l'équation du cône *auxiliaire* ayant pour sommet le point O, et pour base la trace du plan ABC sur la surface.

Les trois génératrices particulières OA, OB, OC de ce cône, formant un système rectangulaire, la somme algébrique des coefficients des carrés des variables doit être nulle dans l'équation (3), et l'on a

$$c^2(A + A' + A'') - 2c(Ca + C'b - C'') + D(a^2 + b^2 + 1) = 0,$$

ou

$$(4) \quad D(a^2 + b^2) + (A + A' + A'')c^2 - 2C.ac - 2C'.bc + 2C''.c + D = 0.$$

C'est la relation existant entre les paramètres variables a, b, c qui figurent dans l'équation du plan ABC. D'ailleurs ce plan ABC n'est

autre chose que le plan polaire d'un point du lieu cherché, et cette relation est du second degré en a, b, c. Donc la surface cherchée est elle-même du second degré.

2. Si l'on remarque maintenant que chacune des trois cordes rectangulaires OA, OB, OC coupe la surface en deux points, et si l'on combine de toutes les manières possibles les plans tangents menés par des points qui appartiennent à trois cordes distinctes, on obtient ce théorème :

Si trois cordes rectangulaires d'un ellipsoïde tournent autour d'un même point fixe, les six plans tangents menés à l'ellipsoïde par les extrémités de ces cordes déterminent un hexaèdre *variable*, à faces quadrilatères; *cet hexaèdre, dans son mouvement, reste toujours* circonscrit *à l'ellipsoïde donné et* inscrit *à un second ellipsoïde déterminé; et les diagonales qui réunissent ses sommets opposés se croisent au même point*.

Cette proposition offre un premier exemple d'un polyèdre variable simultanément inscrit et circonscrit à deux surfaces fixes du second degré. M. Prouhet en a trouvé de son côté plusieurs autres, consignés dans un Mémoire considérable que des raisons particulières l'empêchent de publier encore.

V.

1. Si l'on désigne par a, b, c trois paramètres indéterminés, et par

$$A = 0,\ A' = 0;\quad B = 0,\ B' = 0;\quad C = 0,\ C' = 0$$

les faces opposées d'un hexaèdre à faces quadrilatères; l'équation générale des surfaces du second degré circonscrites à cet hexaèdre est

$$\frac{A.A'}{a} + \frac{B.B'}{b} + \frac{C.C'}{c} = 0, \tag{1}$$

comme on le voit immédiatement. Rapprochée de l'équation connue

$$\frac{A.A'}{a} + \frac{B.B'}{b} = 0, \tag{1}$$

des courbes du second degré circonscrites à un quadrilatère, elle montre que la figure de l'espace susceptible d'offrir des propriétés analogues à celles du quadrilatère inscrit à une conique est, au moins à certains égards, l'hexaèdre à faces quadrilatères inscrit à une surface de second ordre; et cette observation pourra peut-être s'utiliser. Mais l'équation (1) présente une anomalie tout à fait imprévue, et dont la seule constatation fournit un théorème intéressant.

On sait, en effet, qu'une surface du second ordre est, en général, déterminée par la donnée de neuf points; de telle sorte que, apres avoir exprimé qu'une pareille surface passe par *huit* points donnés, l'équation obtenue, rendue homogène par rapport aux parametres indéterminés, ne doit plus contenir que *deux* de ces paramètres. Or ici la surface (1) est déjà assujettie à passer par *huit* points donnés, les huit sommets de l'hexaèdre; mais son équation contient encore *trois* paramètres indéterminés et que l'on pourra particulariser de manière que la surface contienne deux nouveaux points choisis arbitrairement dans l'espace. Il faut donc que la donnée géométrique des huit premiers points se traduise analytiquement par *huit* conditions *réductibles à sept*, et cette réduction, nécessaire, se traduit à son tour par ce théorème curieux : *Toute surface de second ordre passant par les sept premiers sommets d'un hexaèdre octogonal, passe aussi par le huitième.*

2. On peut d'ailleurs vérifier directement la proposition de la manière suivante :

Soient *abcd*, *a'b'c'd'* deux faces opposées de l'hexaèdre octogonal, et *d'* le sommet qui n'est pas donné comme appartenant à la surface S. Les faces *abcd*, *a'b'c'd'* se coupant dans une droite DD', soient 1, 2, 3, 4 les traces des côtés *ab*, *bc*, *cd*, *da* sur la droite DD', et 5, 6, les traces de cette droite elle-même sur la surface. Les points 1, 2, 3, 4, seront aussi les traces des côtés *a'b'*, *b'c'*, *c'd'*, *d'a'* sur la droite DD', et les points 5, 6 représenteront aussi les communes traces de la droite DD' sur les coniques *abcd*, *a'b'c'*, déterminées dans la surface par les plans des deux faces considérées.

Cela posé, *les points* 1, 2, 3, 4, 5, 6, considérés comme appartenant au plan de la face *abcd*, *sont les traces d'une même droite* DD' *sur une*

conique abcd et sur les côtés d'un quadrilatère inscrit. Les points 1, 2, 3, 4, 5, 6 *sont* donc *en involution*. Mais ces six points appartiennent aussi au plan $a'b'c'd'$, et ne sont autres, dans ce plan, que les traces d'une même droite DD' sur une courbe du second degré $a'b'c'$ et sur les côtés d'un quadrilatère $a'b'c'd'$ dont les trois premiers sommets appartiennent à cette courbe ; ils sont de plus en involution ; donc le dernier sommet du quadrilatère appartient à la courbe, et le dernier sommet de l'hexaèdre à la surface.

5. Une autre démonstration purement descriptive est celle-ci : Que l'on imagine le quadrilatère gauche ABCD formé par les intersections successives des arêtes latérales aa', bb', cc', dd' de l'hexaèdre précédent ; et l'hyperboloïde H passant par les quatre côtés de ce quadrilatère, et par un *neuvième* point α situé sur la section de la surface S par le plan *abcd*. Cet hyperboloïde est entièrement déterminé, et son intersection avec la surface proposée est un système de deux courbes planes. La première, $abcd\alpha$, en vertu de la définition de l'hyperbole, et le plan de la seconde coïncidant avec le plan des trois points a', b', c', communs aussi aux deux surfaces. D'ailleurs la trace de l'hyperboloïde sur le plan $a'b'c'$ passe aussi par le point d'. Donc, etc.

VI.

1. « Toute surface du second degré qui se trouve tangente aux sept premières faces d'un *octaèdre hexagonal* est aussi tangente à la huitième. » C'est le théorème corrélatif du précédent. Il en résulte que le lieu des centres des surfaces du second degré inscrites à un pareil octaèdre, est le même que le lieu analogue pour les surfaces tangentes à sept plans donnés ; c'est-à-dire un plan, comme l'on sait. On ne sait rien, il est vrai, sur la construction générale, probablement très-compliquée, de ce plan au moyen des sept plans donnés ; mais nous allons voir que cette construction est infiniment simple dans le cas particulier des surfaces inscrites à un octaèdre.

2. Considérons, en effet, un *octaèdre hexagonal* quelconque et ses trois *quadrilatères gauches diagonaux ;* chacun de ceux-ci ayant pour côtés quatre arêtes consécutives de l'octaèdre, et *séparant* deux de ses

sommets opposés. Imaginons, en outre, les trois séries d'hyperboloïdes passant par les côtés de chacun de ces trois quadrilatères. Comme tout plan mené par une génératrice rectiligne d'un hyperboloïde est tangent à la surface en quelque point de cette génératrice, tous ces hyperboloïdes se trouveront tangents aux huit faces de l'octaèdre; et les trois lieux de leurs centres appartiendront au plan général des centres. Mais on sait que *la droite qui réunit les milieux des diagonales d'un quadrilatère gauche est le lieu des centres des hyperboloïdes passant par les côtés de ce quadrilatère*. Donc ici la droite des milieux des diagonales, relative à chacun des trois quadrilatères diagonaux, appartient au plan général des centres. D'ailleurs les diagonales des quadrilatères diagonaux ne sont autres que les diagonales mêmes de l'octaèdre; et l'on en conclut que *le lieu des centres des surfaces du second degré inscrites à un octaèdre hexagonal quelconque, est le plan mené par les milieux de ses diagonales*. Proposition analogue au théorème de Newton sur le lieu des centres des coniques inscrites à un quadrilatère plan.

VII.

1. Le théorème du § V est implicitement compris dans la proposition suivante, aussi belle que générale, et que l'on doit à M. Otto Hesse : « Toute surface du second degré, passant par les sept premiers sommets de deux tétraèdres isolément conjugués par rapport à une surface également du second degré, passe aussi par le huitième. En outre, sept points, donnés arbitrairement dans l'espace, étant considérés comme formant les sept premiers sommets de deux tétraèdres isolément conjugués par rapport à une surface du second degré, inconnue de forme et de position : cette surface et le huitième sommet sont déterminés. » Les calculs, à l'aide desquels le célèbre géomètre établit ce théorème, paraissent compliqués, au moins pour les lecteurs peu familiers à la nouvelle analyse. Mais on peut, en reprenant en sens inverse le chemin de l'auteur, le ramener, comme il suit, à l'analyse vulgaire.

2. Soient

$$(1) \qquad \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = t^2$$

une surface du second degré, S_2, rapportée aux quatre faces du tétraèdre de référence

$$o = x = y = z = t,$$

et

$$\frac{xx'}{a} + \frac{yy'}{b} + \frac{zz'}{b} = tt' \tag{2}$$

le plan polaire du point $(x'y'z't')$ par rapport à la surface (1). Il résulte immédiatement de l'équation (2) que le tétraèdre de référence $(xyzt)$ est *conjugué* par rapport à la surface (1).

3. Soient, en outre,

$$(p) \quad \left\{ \begin{array}{lll} P & \text{ou} & A\,x + B\,y + C\,z - t = o, \\ P_1 & \text{ou} & A_1 x + B_1 y + C_1 z - t = o, \\ P_2 & \text{ou} & A_2 x + \ldots\ldots\ldots = o, \\ P_3 & \text{ou} & A_3 x + \ldots\ldots\ldots = o, \end{array} \right.$$

les faces d'un second tétraèdre *conjugué* relativement à la même surface.

Identifiant d'abord l'équation P et l'équation (2), l'on a

$$x' = aAt', \quad y' = bBt', \quad z' = cCt',$$

pour le pôle $(x'y'z't')$ de la première face P du second tétraedre; et l'on trouverait de même les pôles des autres faces. D'ailleurs, le pôle de chacune de ces quatre faces doit appartenir aux trois autres, et de là résultent ces *six* équations de condition

$$aAA_1 + bBB_1 + cCC_1 = 1, \tag{1}$$

$$aAA_2 + bBB_2 + cCC_2 = 1, \tag{2}$$

$$aAA_3 + bBB_3 + cCC_3 = 1; \tag{3}$$

$$aA_2A_3 + bB_2B_3 + cC_2C_3 = 1, \tag{4}$$

$$aA_3A_1 + bB_3B_1 + cC_3C_1 = 1, \tag{5}$$

$$aA_1A_2 + bB_1B_2 + cC_1C_2 = 1. \tag{6}$$

4. Soit enfin

$$(3)\quad m_1 PP_1 + m_2 PP_2 + m_3 PP_3 + \mu_1 P_2 P_3 + \mu_2 P_3 P_1 + \mu_3 P_1 P_2 = 0$$

l'équation d'une surface indéterminée du second degré, circonscrite au second tétraèdre $(PP_1P_2P_3)$, actuellement conjugué par rapport à la surface (1). Pour que la surface (3) passe par trois des quatre sommets du tétraèdre conjugué primitif $(xyzt)$, il faut, en remplaçant dans l'équation (3) les fonctions P par leurs valeurs (p), que trois des quatre carrés x^2, y^2, z^2, t^2 disparaissent d'eux-mêmes de l'équation résultante

$$(3')\quad \left\{ \begin{aligned} & m_1(Ax + By + Cz - t)(A_1x + B_1y + C_1z - t) \\ & + m_2(Ax\ldots)(A_2x\ldots) + m_3(Ax\ldots)(A_3x\ldots) \\ & + \mu_1(A_2x\ldots)(A_3x\ldots) + \mu_2\ldots + \mu_3\ldots = 0. \end{aligned} \right.$$

Les six coefficients m_1, m_2, m_3, μ_1, μ_2, μ_3 satisferont donc, par hypothèse, à trois des quatre équations suivantes, obtenues en égalant à zéro les coefficients des termes en x^2, y^2, z^2, t^2 de l'équation (3') :

$$(\text{I})\quad m_1 AA_1 + m_2 AA_2 + m_3 AA_3 + \mu_1 A_2A_3 + \mu_2 A_3A_1 + \mu_3 A_1A_2 = 0,$$

$$(\text{II})\quad m_1 BB_1 + m_2 BB_2 + m_3 BB_3 + \mu_1 B_2B_3 + \mu_2 B_3B_1 + \mu_3 B_1B_2 = 0,$$

$$(\text{III})\quad m_1 CC_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \mu_1 C_2C_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots = 0,$$

$$(\text{IV})\quad m_1 + m_2 + m_3 + \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 0.$$

Et la surface (3), qui passe déjà, suivant l'hypothèse, par les quatre sommets du tétraèdre $PP_1P_2P_3$ et par trois des sommets du tétraèdre $xyzt$, passera d'elle-même par le dernier de ces sommets, si l'une quelconque des quatre équations de condition (I), (II), (III), (IV) est une conséquence des trois autres; ce que l'on vérifie aisément.

Des *égalités* 1, 2, 3, 4, 5, 6, respectivement multipliées par les nombres m_1, m_2, m_3, μ_1, μ_2, μ_3, et ajoutées membre à membre, il résulte, en effet, cette nouvelle *égalité*

$$(\text{I})a + (\text{II})b + (\text{III})c = (\text{IV}).$$

Mais trois des quatre termes de celle-ci sont nuls par hypothèse; le

quatrième terme est donc nul de lui-même; l'une quelconque des équations (I), (II), (III), (IV) est une conséquence des trois autres, et la première partie du théorème est démontrée.

5. « Le premier tétraèdre $xyzt$ et les trois faces P_1, P_2, P_3 du second tétraèdre étant donnés; la quatrième face P de celui-ci est déterminée, ainsi que la surface du second degré (1), par rapport à laquelle chacun des deux tétraèdres doit être conjugué. »

Les trois faces P_1, P_2, P_3 étant données, les coefficients A_1, B_1, C_1; A_2, B_2, C_2; A_3, B_3, C_3, qui figurent dans les équations de ces faces rapportées au tétraèdre donné $xyzt$, sont des nombres donnés; les six coefficients A, B, C, a, b, c, relatifs à la face P et à la surface (1), demeurant, au contraire, indéterminés ou inconnus. Mais les équations 4, 5, 6 sont linéaires par rapport aux inconnues a, b, c et les déterminent. Les équations 1, 2, 3 où a, b, c ne désignent plus que des nombres connus, sont linéaires encore par rapport aux inconnues restantes A, B, C, et les déterminent. Donc, etc.

6. « Le premier tétraèdre $xyzt$ et les trois premiers sommets p_1, p_2, p_3 du second tétraèdre $pp_1p_2p_3$ étant donnés, le quatrième sommet p de celui-ci et la surface (1) sont déterminés. »

Soient, en effet, X, Y, Z, T et P_1, P_2, P_3 les plans polaires des sommets x (opposé à la face $x=0$), y, z, t, et p_1, p_2, p_3, par rapport à une surface auxiliaire quelconque du second degré.

Si l'on considère X, Y, Z, T et P_1, P_2, P_3 comme formant les sept premières faces de deux tétraèdres isolément conjugués par rapport à une surface inconnue du second ordre Σ_2, on conclura de ce qui précède que, le premier tétraèdre XYZT étant donné ainsi que les trois faces P_1, P_2, P_3 du second, la quatrième face P de celui-ci et la surface Σ_2 sont déterminées. De là enfin, en revenant à la figure primitive, on verra que le quatrième sommet p du second tétraèdre et la surface (1) se trouvent déterminés, et ne sont autres que le pôle du plan P et la polaire réciproque de la surface Σ_2, par rapport à la surface auxiliaire.

VIII.

1. Les équations les plus générales de quatre droites, menées d'une

manière quelconque par les quatre sommets du tétraèdre

$$0 = x_1 = x_2 = x_3 = x_4,$$

étant

$$(D)\quad \begin{cases} D_1, & \dfrac{x_2}{a_{2,1}} = \dfrac{x_3}{a_{3,1}} = \dfrac{x_4}{a_{4,1}}, \\ D_2, & \dfrac{x_1}{a_{1,2}} = \dfrac{x_3}{a_{3,2}} = \dfrac{x_4}{a_{4,2}}, \\ D_3, & \dfrac{x_1}{a_{1,3}} = \dfrac{x_2}{a_{2,3}} = \dfrac{x_4}{a_{4,3}}, \\ D_4, & \dfrac{x_1}{a_{1,4}} = \dfrac{x_2}{a_{2,4}} = \dfrac{x_3}{a_{3,4}}; \end{cases}$$

les droites (D) seront quatre génératrices du même mode de génération d'un hyperboloïde à une nappe, s'il existe entre les douze coefficients $a_{1,2}$ et $a_{2,1}$, $a_{1,3}$ et $a_{3,1}$, ..., les six relations

$$(d)\qquad 1 = \frac{a_{1,2}}{a_{2,1}} = \frac{a_{1,3}}{a_{3,1}} = \ldots = \frac{a_{i,k}}{a_{k,i}}.$$

2. Ces conditions étant remplies, les génératrices du même hyperboloïde, *conjuguées* des premières, c'est-à-dire issues des sommets du même tétraèdre, et appartenant au second mode de génération, seront les suivantes

$$(D')\quad \begin{cases} D'_1, & a_{3,4}x_2 = a_{2,4}x_3 = a_{2,3}x_4, \\ D'_2, & a_{3,4}x_1 = a_{1,4}x_3 = a_{1,3}x_4, \\ D'_3, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ D'_4, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

et leurs équations se déduisent des premières (D), en remplaçant, dans celles-ci, les coefficients $a_{1,2}, \ldots$, par les inverses $\frac{1}{a_{3,4}}, \ldots$, des coefficients *opposés* ou *à indices complémentaires* $a_{3,4}, \ldots$.

3. Enfin, les quatre génératrices du second système se confondront avec les génératrices correspondantes du premier; celles-ci, elles-mêmes, seront concourantes, et l'hyperboloïde se réduira à un cône, si l'on a

en outre la double égalité

$$(\delta)\qquad a_{1,2}a_{3,4} = a_{1,3}a_{2,4} = a_{1,4}a_{2,3}.$$

La vérification de tous ces énoncés ne présente aucune difficulté, et nous ne nous y arrêterons pas autrement, dans l'ignorance où nous sommes si les équations (D) et (D') n'auraient pas été données déjà. Nous pourrons d'ailleurs, si ces formules paraissent nouvelles, indiquer dans une autre occasion la méthode qui nous y a conduit ; et nous nous bornerons, pour le moment, à en présenter quelques applications.

4. Soient $o = x_1 = x_2 = x_3 = x_4$ les faces opposées aux sommets 1, 2, 3, 4 du tétraèdre 1234, les fonctions x_1, x_2,..., développées, étant $x\cos\alpha_1 + y\cos\beta_1 + z\cos\gamma_1 - p_1,\ldots$.

Si l'on désigne par $\widehat{a_{1,2}}$, $\widehat{a_{2,3}}$,..., les dièdres formés par les faces x_1 et x_2, x_2 et x_3,..., on trouvera sans peine, pour les quatre *hauteurs* H_1, H_2, H_3, H_4 du tétraèdre, les équations suivantes

$$(\mathrm{H})\quad \begin{cases} H_1, & \dfrac{x_2}{\cos\widehat{a_{2,1}}} = \dfrac{x_3}{\cos\widehat{a_{3,1}}} = \dfrac{x_4}{\cos\widehat{a_{4,1}}}, \\ H_2, & \dfrac{x_1}{\cos\widehat{a_{1,2}}} = \dfrac{x_3}{\cos\widehat{a_{3,2}}} = \dfrac{x_4}{\cos\widehat{a_{4,2}}}, \\ H_3, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ H_4, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

équations de la même forme que les équations (D). D'ailleurs, les équations de condition (d)

$$1 = \frac{a_{1,2}}{a_{2,1}} = \frac{a_{1,3}}{a_{3,1}} = \ldots,$$

se réduisent ici à des identités, puisque l'on a, identiquement,

$$\cos\widehat{a_{1,2}} = \cos\widehat{a_{2,1}},$$

et ainsi des autres. Les quatre hauteurs d'un tétraèdre quelconque forment donc toujours quatre génératrices du même mode de génération d'un hyperboloïde à une nappe, théorème bien connu et que l'on doit à M. Chasles.

3. Mais on peut donner à cette proposition un complément nouveau; et il arrive même ici, par une sorte de hasard rationnel qui devrait s'offrir plus souvent, que, présentée dans toute son étendue, la proposition devient évidente.

Que l'on considère, en effet, en même temps que les quatre génératrices ou les quatre hauteurs précédentes, leurs génératrices *conjuguées*. Les équations de celles-ci seront, d'après le n° 2,

$$
(\mathrm{H}') \quad \begin{cases}
\mathrm{H}'_1, & x_2 \cos \widehat{a_{3,4}} = x_3 \cos \widehat{a_{2,4}} = x_4 \cos \widehat{a_{2,3}}, \\
\mathrm{H}'_2, & x_1 \cos \widehat{a_{3,4}} = x_3 \cos \widehat{a_{1,4}} = x_4 \cos \widehat{a_{1,3}}, \\
\mathrm{H}'_3, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\mathrm{H}'_4, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.
\end{cases}
$$

Or chacune de ces nouvelles droites dépend seulement de l'un des quatre trièdres du tétraèdre proposé; et l'on lit aisément, sur leurs équations, que chacune d'elles est la *droite-hauteur* du trièdre correspondant, ou la commune intersection des trois plans menés, suivant chacune des arêtes du trièdre, perpendiculairement à la face opposée. Il en résulte que « les quatre *droites-hauteurs*, relatives aux quatre trièdres d'un tétraèdre quelconque, et les quatre hauteurs du tétraèdre forment huit génératrices d'un même hyperboloïde » D'ailleurs, et présentée dans ces termes, la proposition est évidente; car il résulte immédiatement, de la définition géométrique des huit droites, que chacune des droites H, ou H', rencontre toutes les droites H', ou toutes les droites H.

Remarque. — La plupart des théorèmes analogues énoncés par M. Chasles s'établissent géométriquement de la même manière et deviennent évidents par la juxtaposition, aux quatre droites de l'énoncé, des quatre génératrices conjuguées. Par exemple : « Dans tout tétraèdre

circonscrit à une surface du second ordre, les droites unissant chaque sommet au point de contact de la face opposée, sont quatre génératrices, etc. » Les quatre génératrices conjuguées s'obtiendront ici de la manière suivante : on considérera les trois points de contact t_2, t_3, t_4 des faces adjacentes au sommet 1 du tétraèdre; le triangle $T_2 T_3 T_4$ circonscrit à la surface, déterminé par le plan de ces trois points; et, dans ce triangle, le point de concours θ_1 des droites joignant chaque sommet au point de contact du côté opposé; la droite qui réunit le sommet 1 du tétraèdre au point θ_1 sera l'une des quatre génératrices auxiliaires, dont l'intervention ramènera le théorème à l'évidence.

6. Les droites (H) et (H′) se confondent, et *les quatre hauteurs du tétraèdre concourent en un même point, si l'on a, suivant la double condition* (δ),

$$(\eta) \qquad \cos\widehat{a_{1,2}}.\cos\widehat{a_{3,4}} = \cos\widehat{a_{1,3}}.\cos\widehat{a_{2,4}} = \cos\widehat{a_{1,4}}.\cos\widehat{a_{2,3}}.$$

Mais ce cas correspond, comme on sait, à l'orthogonalité des arêtes opposées du tétraèdre; et celle-ci, comme on l'a vu dans le § 1er, se traduit directement par cette double égalité :

$$(1) \qquad a^2 - b'^2 - c'^2 = b^2 - c'^2 - a'^2 = c^2 - a'^2 - b'^2,$$

où a, b, c désignent les côtés de la base et a', b', c' les arêtes opposées à ces arêtes. Les équations de condition (1) et (η) sont donc équivalentes.

7. Que l'on imagine, menés par le centre d'une sphère, quatre plans parallèles aux faces du tétraèdre précédent, et huit rayons parallèles aux droites (H) et (H′); les traces sphériques de ces rayons, parallèles à huit génératrices d'un hyperboloïde, seront huit points d'une même conique sphérique. D'ailleurs, les quatre premières traces sont les pôles des quatre côtés d'un quadrilatère sphérique quelconque; les quatre dernières sont les points de rencontre des hauteurs des quatre triangles déterminés par les côtés de ce quadrilatère, pris trois à trois; et l'on a ce théorème : *Dans tout quadrilatère sphérique, les pôles des quatre côtés et les points de rencontre des hauteurs de chacun des*

quatre triangles formés par les côtés du quadrilatère, pris trois à trois, sont huit points d'une même conique sphérique.

Si le rayon grandit indéfiniment, le quadrilatère sphérique se transforme en un quadrilatère plan; les pôles des quatre côtés disparaissent sur *la droite à l'infini*, et les points de rencontre des hauteurs des quatre triangles se trouvent distribués sur une seconde droite. Dans le cas enfin où les diagonales du quadrilatère sphérique sont égales à un quadrant, les huit points se réduisent à quatre; et les points de rencontre des hauteurs des quatre triangles se confondent avec les pôles des quatre côtés.

8. Si l'on appelle *médiane* d'un trièdre la commune intersection des trois plans menés par chacune de ses arêtes et par la bissectrice de la face opposée, on verra encore que: *Les quatre médianes déterminées par les quatre trièdres d'un tétraèdre quelconque sont quatre génératrices d'un même hyperboloïde; qu'il en est de même des quatre droites unissant chaque sommet du tétraèdre au centre du cercle inscrit dans la face opposée, et que ces huit droites appartiennent au même hyperboloïde.*

On trouve, en effet, pour les quatre premières droites,

$$(M)\quad\begin{cases} M_1, & x_2 \sin\widehat{a_{3,4}} = x_3 \sin\widehat{a_{2,4}} = x_4 \sin\widehat{a_{2,3}}, \\ M_2, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ M_2, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ M_4, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

et pour les quatre dernières,

$$(M')\quad\begin{cases} M'_1, & \dfrac{x_2}{\sin\widehat{a_{2,1}}} = \dfrac{x_3}{\sin\widehat{a_{3,1}}} = \dfrac{x_4}{\sin\widehat{a_{4,1}}}; \\ M'_2, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ M'_3, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ M'_4, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots: \end{cases}$$

les huit droites se réduisant à quatre, et ces quatre droites concourant

en un même point, si l'on a

$$(m) \qquad \sin\widehat{a_{1,2}}.\sin\widehat{a_{3,4}} = \sin\widehat{a_{1,3}}.\sin\widehat{a_{2,4}} = \sin\widehat{a_{1,4}}.\sin\widehat{a_{2,3}}.$$

IX.

1. La représentation analytique de quatre génératrices d'un hyperboloïde, qui résulte des équations (D) du paragraphe précédent, suppose ces quatre droites menées par les sommets du tétraèdre de référence

$$o = x_1 = x_2 = x_3 = x_4.$$

Mais quatre génératrices d'une pareille surface peuvent être définies autrement, et, au lieu de passer respectivement par les quatre points d'un certain tétraèdre, être situées une à une dans chacun des plans de ses quatre faces. Il ne sera donc pas inutile, pour compléter cette étude, de former les équations qui répondent à cette seconde définition.

Or les équations les plus générales de quatre droites situées respectivement, et d'une manière quelconque, dans les quatre faces du tétraèdre $o = x_1 = x_2 = x_3 = x_4$, étant

$$(\Delta) \quad \begin{cases} x_1 = o, \quad \text{et} \quad a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + a_{1,4}x_4 = o, & \Delta_1, \\ x_2 = o, \quad \text{et} \quad a_{2,1}x_1 + a_{2,3}x_3 + a_{2,4}x_4 = o, & \Delta_2, \\ x_3 = o, \quad \text{et} \quad a_{3,1}x_1 + a_{3,2}x_2 + a_{3,4}x_4 = o, & \Delta_3, \\ x_4 = o, \quad \text{et} \quad a_{4,1}x_1 + a_{4,2}x_2 + a_{4,3}x_3 = o, & \Delta_4 : \end{cases}$$

ces droites seront quatre génératrices du même mode de génération d'un hyperboloïde, si l'on a les six relations

$$(\delta) \qquad 1 = \frac{a_{1,2}}{a_{2,1}} = \frac{a_{1,3}}{a_{3,1}} = \ldots = \frac{a_{i,k}}{a_{k,i}}.$$

2. D'ailleurs, ces conditions étant remplies, les quatre génératrices du même hyperboloïde, *conjuguées* des premières, c'est-à-dire situées dans les faces du même tétraèdre et appartenant au second mode de

génération, seront les suivantes :

$$(\Delta')\quad \begin{cases} x_1 = 0, \quad \text{et} \quad \dfrac{x_2}{a_{3,4}} + \dfrac{x_3}{a_{2,4}} + \dfrac{x_4}{a_{2,3}} = 0, & \Delta'_1, \\ x_2 = 0, \quad \text{et} \quad \dfrac{x_1}{a_{3,4}} + \dfrac{x_3}{a_{1,4}} + \dfrac{x_4}{a_{1,3}} = 0, & \Delta'_2, \\ x_3 = 0, \quad \text{et} \quad \dfrac{x_1}{a_{2,4}} + \ldots\ldots = 0, & \Delta'_3, \\ x_4 = 0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots, & \Delta'_4\ [*]. \end{cases}$$

3. Enfin ces huit droites se réduiront à quatre, et ces quatre droites concourront en un même point, si l'on a la double égalité

$$(\delta')\qquad a_{1,2}\cdot a_{3,4} = a_{1,3}\cdot a_{2,4} = a_{1,4}\cdot a_{2,3}.$$

4. *Application.* Théorème. Si les huit faces x_1, X_1 ; x_2, X_2 ; x_3, X_3, x_4, X_4 de deux tétraèdres se coupent deux à deux suivant quatre génératrices du même mode de génération d'un hyperboloïde ; les droites réunissant les sommets homologues des deux tétraèdres seront aussi quatre génératrices d'un second hyperboloïde. Réciproquement, si les droites qui joignent les sommets homologues de deux tétraèdres sont quatre génératrices d'un hyperboloïde ; les droites, intersections des faces homologues des deux tétraèdres, sont aussi quatre génératrices d'un second hyperboloïde (*Cayley*).

La doctrine des polaires réciproques permet de passer de l'une de ces propositions à l'autre, et nous nous bornerons, dès lors, à établir la proposition directe.

Soient, à cet effet,

$$(x)\qquad 0 = x_1 = x_2 = x_3 = x_4,$$

---

[*] Ces nouvelles équations se formant des premières en remplaçant dans celles-ci chacun des coefficients $a_{1,2},\ldots$, par l'inverse $\dfrac{1}{a_{3,4}}$ du coefficient à indices complémentaires $a_{3,4}$.

les faces du premier tétraèdre, et

$$(X)\quad\begin{cases} o = X_1 = a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + a_{1,4}x_4, \\ o = X_2 = a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 + a_{2,4}x_4, \\ o = X_3 = a_{3,1}x_1 + a_{3,2}x_2 + a_{3,3}x_3 + a_{3,4}x_4, \\ o = X_4 = a_{4,1}x_1 + a_{4,2}x_2 + a_{4,3}x_3 + a_{4,4}x_4, \end{cases}$$

les faces homologues du second. Les droites Δ_1, Δ_2, intersections des faces homologues x_1 et X_1, x_2 et $X_2 \ldots$, ont pour équations

$$(\Delta)\quad\begin{cases} x_1 = o, \quad \text{et} \quad a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + a_{1,4}x_4 = o, & \Delta_1, \\ x_2 = o, \quad \text{et} \quad a_{2,1}x_1 + a_{2,3}x_3 + a_{2,4}x_4 = o, & \Delta_2, \\ x_3 = o, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \Delta_3, \\ x_4 = o, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \Delta_4; \end{cases}$$

et puisque ces droites, par hypothèse, sont quatre génératrices d'un hyperboloïde, l'on a, d'après le paragraphe précédent, entre les coefficients des équations (X), les six relations

$$(\delta)\qquad 1 = \frac{a_{1,2}}{a_{2,1}} = \frac{a_{1,3}}{a_{3,1}} = \ldots = \frac{a_{i,k}}{a_{k,i}}.$$

Cela posé, cherchons d'abord les équations de la droite

$$D_4, \quad \frac{x_1}{\alpha_{1,4}} = \frac{x_2}{\alpha_{2,4}} = \frac{x_3}{\alpha_{3,4}},$$

qui réunit le sommet $o = x_1 = x_2 = x_3$ du premier tétraèdre au sommet $o = X_1 = X_2 = X_3$ du second.

Remarquons, à cet effet, que si les trois premières des équations (X),

$$o = X_1, \quad o = X_2, \quad o = X_3,$$

étaient résolues par rapport aux inconnues $\frac{x_1}{x_4}, \frac{x_2}{x_4}, \frac{x_3}{x_4}$, on aurait

$$\frac{x_1}{x_4} = \frac{N_1}{D}, \quad \frac{x_2}{x_4} = \frac{N_2}{D}, \quad \frac{x_3}{x_4} = \frac{N_3}{D};$$

et, par suite,

$$\frac{x_1}{N_1} = \frac{x_2}{N_2} = \frac{x_3}{N_3}.$$

Les coefficients $\alpha_{1,4}$, $\alpha_{2,4}$, $\alpha_{3,4}$ des équations D_4 ne sont donc autres que N_1, N_2, N_3, et peuvent se déduire immédiatement, suivant la règle connue, du déterminant

$$D = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = a_{1,1}(a_{2,2}a_{2,3} - a_{2,3}a_{3,2}) + a_{2,1}(a_{3,2}a_{1,3} - a_{3,3}a_{1,2}) + a_{3,1}(a_{1,2}a_{1,3} - a_{1,3}a_{2,2}).$$

On a donc, en se bornant au calcul du coefficient $\alpha_{1,4}$,

$$(1,4)\quad \left\{ \begin{aligned} \alpha_{1,4} = &- a_{1,4}(a_{2,2}a_{3,3} - a_{2,3}a_{3,2}) - a_{2,4}(a_{3,2}a_{1,3} - a_{3,3}a_{1,2}) \\ &- a_{3,4}(a_{1,2}a_{2,3} - a_{1,3}a_{2,2}). \end{aligned} \right.$$

D'un autre côté, les équations de la droite D_1, qui réunit les sommets $o = x_4 = x_2 = x_3$ du premier tétraèdre au sommet homologue $o = X_4 = X_2 = X_3$ du second, étant

$$D_1, \quad \frac{x_4}{\alpha_{4,1}} = \frac{x_2}{\alpha_{2,1}} = \frac{x_3}{\alpha_{3,1}},$$

il résulte, de la définition des droites D_4, D_1 et de la notation, que l'on pourra passer du coefficient $\alpha_{1,4}$, relatif à la première de ces droites, au coefficient $\alpha_{4,1}$, relatif à la seconde, par le simple échange des indices 1 et 4, et l'on a

$$(4,1)\quad \left\{ \begin{aligned} \alpha_{4,1} = &- a_{4,1}(a_{2,2}a_{3,3} - a_{2,3}a_{3,2}) - a_{2,1}(a_{3,2}a_{4,3} - a_{3,3}a_{4,2}) \\ &- a_{3,1}(a_{4,2}a_{3,2} - a_{4,3}a_{2,2}). \end{aligned} \right.$$

D'ailleurs, en vertu des relations données (δ), les coefficients $\alpha_{1,4}$ et $\alpha_{4,1}$ sont identiques; on a la suite d'égalités

$$1 = \frac{\alpha_{1,4}}{\alpha_{4,1}} = \frac{\alpha_{1,3}}{\alpha_{3,1}} = \ldots = \frac{\alpha_{i,k}}{\alpha_{k,i}};$$

et les droites D_1, D_2, D_3, D_4 sont quatre génératrices d'un même hyperboloïde.

X.

1. Équation générale des surfaces du second ordre inscrites au tétraèdre $o = x_1 = x_2 = x_3 = x_4$.

Si l'on désigne par $a_{1,2}$, $a_{1,3}$, $a_{1,4}$, $a_{2,3}$, $a_{3,4}$, $a_{2,4}$ six coefficients indéterminés,

$$(1)\quad \Sigma x_1^2 \,.\, a_{2,3}a_{3,4}a_{2,4} + \Sigma x_1 x_2 \,.\, a_{3,4}(a_{1,2}a_{3,4} - a_{1,3}a_{2,4} - a_{1,4}a_{2,3}) = 0$$

sera l'équation générale des surfaces du second ordre inscrites au tétraèdre $0 = x_1 = x_2 = x_3 = x_4$.

Bien qu'exigeant d'assez longs calculs, la vérification de cette équation ne présente pas de difficulté. On peut y parvenir d'ailleurs par une méthode régulière, indépendante des tâtonnements, dont l'emploi suffit souvent dans les questions de ce genre, mais qui seraient insuffisants dans celle-ci.

2. Si les équations $0 = x_1 = x_2 = \ldots$ des faces du tétraèdre sont de la forme

$$0 = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p,$$

et que, en désignant par (x_1, x_2), (x_1, x_3), ..., les angles dièdres formés par les faces x_1 et x_2, x_1 et x_3, ... l'on pose dans l'équation (1),

$$(1')\qquad a_{1,2} = \cos^2\frac{1}{2}(x_1, x_2),\quad a_{1,3} = \cos^2\frac{1}{2}(x_1, x_3), \ldots,$$

l'équation (1) représentera la *sphère inscrite* au même tétraèdre.

3. Enfin la *sphère circonscrite* est représentée par l'équation

$$(2)\qquad \Sigma x_1 x_2 \,.\, a_{3,4}\sin(x_3, x_4) = 0,$$

où $a_{3,4}$ désigne la longueur de l'arête intersection des faces $0 = x_3$, $0 = x_4$.

Cette dernière équation a été donnée déjà par M. Prouhet, quoique sous une forme moins simple.

THÉORÈME CONCERNANT LES NOMBRES TRIANGULAIRES;

Par M. J. LIOUVILLE.

On connaît le théorème énoncé par Fermat, que tout nombre entier n est la somme de trois nombres triangulaires. Gauss l'a démontré, comme on sait, en prouvant que $8n+3$ s'exprime toujours par la somme de trois carrés, naturellement impairs. L'équation

$$8n+3=(2x+1)^2+(2y+1)^2+(2z+1)^2$$

entraîne en effet celle-ci

$$n=\frac{x(x+1)}{2}+\frac{y(y+1)}{2}+\frac{z(z+1)}{2},$$

par conséquent le théorème de Fermat.

A-t-on déjà remarqué (et vaut-il la peine de faire remarquer) que tout entier n est aussi formé de la somme de deux nombres triangulaires plus le double d'un nombre triangulaire? En tout cas, la chose est facile à établir. En effet, Gauss a prouvé que le double d'un entier impair est toujours la somme de trois carrés; et il est visible aussi que de ces trois carrés un sera pair et deux impairs. On a donc, en nombres entiers,

$$2(2n+1)=4u^2+(2t+1)^2+(2z+1)^2,$$

d'où, en multipliant par 2 les deux membres,

$$8n+4=(2u+2t+1)^2+(2u-2t-1)^2+2(2z+1)^2,$$

ou, ce qui revient au même,

$$8n+4=(2x+1)^2+(2y+1)^2+2(2z+1)^2.$$

Développant les carrés au second membre, retranchant 4 de part et d'autre et divisant par 8, on a donc enfin

$$n = \frac{x(x+1)}{2} + \frac{y(y+1)}{2} + 2 \cdot \frac{z(z+1)}{2},$$

c'est-à-dire le nouveau théorème dont nous avons parlé, lequel du reste n'est au fond (comme il arrive parfois) qu'un nouvel énoncé d'un théorème depuis longtemps connu et démontré.

Les deux formes

$$x^2 + y^2 + z^2, \quad x^2 + y^2 + 2z^2$$

prises ensemble représentent tous les nombres; mais la première ne peut pas donner les entiers $4^\alpha(8k+7)$, ni la seconde les entiers $2^{2\alpha+1}(8k+7)$. Au contraire chacune des deux expressions

$$\frac{x(x+1)}{2} + \frac{y(y+1)}{2} + \frac{z(z+1)}{2}$$

et

$$\frac{x(x+1)}{2} + \frac{y(y+1)}{2} + 2 \cdot \frac{z(z+1)}{2}$$

étant prise séparément les fournit tous.

ÉTUDE

SUR

LES SINGULARITÉS DES SURFACES ALGÉBRIQUES;

PAR M. E. DE JONQUIÈRES.

NOEUDS OU POINTS CONIQUES.

1. On sait que le plan tangent en un point a d'une surface algébrique S^n, d'un degré quelconque n, coupe la surface suivant une courbe qui a un point double a. Si une autre quelconque des sections planes de S^n, qui passent par le point a, y possède un point double, toutes les sections planes qu'on peut mener ainsi sont dans le même cas. Chacune de ces sections contient donc deux droites osculatrices de la surface, savoir les deux tangentes aux branches de la courbe plane qui se croisent en a; et par conséquent S^n est osculée, au point a, par un cône du second degré. Le point singulier a prend alors le nom de *point double*, ou de *nœud*, ou de *gorge d'un nœud*, ou enfin de *point conique*.

L'ouverture du cône osculateur peut être infiniment petite, et, dans ce cas, le point prend le nom de *point cuspidal*.

Les nœuds des surfaces algébriques jouissent de propriétés importantes, que je vais passer rapidement en revue.

2. *Si la surface $x^{ième}$ polaire d'un point* P, *relative à* S^n, *a un point double* Q, *réciproquement la surface* $(n-x-1)^{ième}$ *polaire du point* Q *a, en général, le point* P *pour point double.*

3. En particulier,

Si la première polaire du point P *a un point double* Q, *la* $(\overline{n-2})^{ième}$ *polaire du point* Q *a le point* P *pour point double, c'est-à-dire que cette polaire est un cône du second degré dont le sommet est en* P.

4. On nomme *pôle harmonique*, relatif à deux surfaces S^m, S^n, un point dont le plan polaire est le même par rapport aux deux surfaces.

Deux surfaces S^m, S^n *ont, en général,*

$$(m+n-2)\left[(\overline{m-1})^2+(\overline{n-1})^2\right]$$

pôles harmoniques.

5. Si les surfaces sont l'une et l'autre du degré n, le nombre de ces pôles est simplement $4(\overline{n-1})^3$.

Dans ce cas, il passe une infinité de surfaces du degré n par la courbe d'intersection de ces deux-là, et toutes ces surfaces forment un faisceau.

Les $4(\overline{n-1})^3$ *pôles harmoniques, relatifs à deux des surfaces du faisceau, sont aussi des pôles harmoniques relatifs à toutes les autres.*

En d'autres termes, chacun de ces points a le même plan polaire dans toutes les surfaces du faisceau.

6. On en conclut aisément que chacun de ces points est un point double sur la surface du faisceau qui y passe, et que, réciproquement, si une des surfaces a un point double, ce point est un des $4(\overline{n-1})^3$ pôles harmoniques définis ci-dessus. Donc

Dans un faisceau (S^n) *il existe en général* $4(\overline{n-1})^3$ *points doubles ou nœuds.*

Corollaire. — Si $n=2$, on retrouve le théorème dû à M. Poncelet concernant les quatre cônes du second degré qui passent, en général, par la courbe gauche du quatrième ordre, intersection de deux surfaces du second degré.

7. *Le lieu des points, dont chacun a le même plan polaire par rapport à une surface fixe* S^m *et à l'une des surfaces d'un faisceau* (S^n), *passe par les* $4(\overline{n-1})^3$ *nœuds du faisceau.*

Ce lieu est, en général, une courbe gauche du degré

$$(\overline{m+2n-3})^2-(n-1)(n+2m-3).$$

8. *Quand deux surfaces d'un faisceau ont un point double com-*

mun, toutes les surfaces du faisceau ont ce même point pour point double.

Les cônes du second degré, osculateurs des surfaces en leur point double commun (1), forment aussi un faisceau. Or trois de ces cônes se réduisent à trois droites, savoir les trois axes conjugués communs à tous les cônes. Donc

9. *Quand les surfaces d'un faisceau ont un point double commun, trois d'entre elles ont un point cuspidal en ce point.*

10. *Quand les surfaces d'un faisceau se touchent en un point, l'une d'elles a un nœud en ce point.*

Donc si les surfaces sont du second degré, la courbe à point double du quatrième ordre, qui est leur intersection commune, est placée sur un cône du second degré, qui a son sommet en ce point double; ce qui d'ailleurs est évident, puisque tout plan mené par ce point ne coupe plus la courbe qu'en deux points, et par conséquent ne contient que deux arêtes du cône.

11. *Le lieu des points de contact des surfaces de deux faisceaux* (S^m), (S^n) *est une courbe à double courbure du degré*

$$(3m^2 + 3n^2 + 4mn - 8m - 8n + 6).$$

12. Si $m = 1$, cette courbe est simplement du degré $(n-1)(3n-1)$. Et on en conclut aisément que le *nombre des points doubles d'un faisceau* (S^n) *est, en général,* $4\overline{(n-1)}^3$, comme plus haut (6).

13. On nomme *réseau* de surfaces une série de surfaces du même degré, telle, qu'il n'en passe qu'une seule par deux points quelconques donnés.

Parmi les surfaces d'un réseau, toutes celles qui passent par un même point donné forment un faisceau.

14. *Les plans polaires d'un point quelconque* P, *relatifs à toutes les surfaces d'un réseau, passent par un même point* P'.

15. On conclut du théorème précédent que

Les plans polaires d'un point de l'espace, relatifs à toutes celles des

surfaces d'un réseau qui sont douées d'un point double, enveloppent un cône de la classe $4(\overline{n-1})^3$.

Corollaire. — Des surfaces du second ordre qui divisent harmoniquement sept segments, ou qui passent par sept points, forment un réseau. Donc

Quand des cônes du second degré divisent harmoniquement sept segments, les plans polaires d'un point quelconque, pris relativement à ces cônes, enveloppent un cône de la quatrième classe. Théorème énoncé par M. Chasles dans le tome LII des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (séance du 10 juin 1861).

16. *Le lieu des points coniques des surfaces* S^n *d'un réseau est une courbe gauche du degré* $6(\overline{n-1})^2$.

En particulier, *le lieu des sommets des cônes du second degré, qui divisent harmoniquement sept segments, est une courbe gauche du sixième ordre.*

Théorème démontré par M. Chasles dans le Mémoire précité, et par M. O. Hesse dans un Mémoire sur les tangentes doubles de la courbe plane du quatrième ordre.

17. Des surfaces du degré n forment un *système,* quand il n'en passe qu'une par trois points quelconques donnés.

Toutes les surfaces d'un système qui passent par un même point forment un réseau; toutes celles qui passent par deux mêmes points forment un faisceau.

18. *Le lieu des points de contact des surfaces d'un système, qui est aussi le lieu de leurs points doubles, est une surface* $Q^{4(n-1)}$ *du degré* $4(n-1)$.

19. *Les points polaires de deux points fixes, pris par rapport à toutes les surfaces d'un système, forment deux figures homographiques entre elles.*

Par exemple, les plans polaires de deux points fixes, relatifs à toutes les surfaces du second ordre qui passent par six mêmes points,

ou qui divisent harmoniquement six segments, forment deux figures homographiques.

20. Les surfaces polaires premières, relatives à une même S^n :

1° De tous les points de l'espace, forment un *système;*

2° De tous les points d'un plan, forment un *réseau;*

3° De tous les points d'une droite, forment un *faisceau*.

21. *Le lieu des points doubles des surfaces polaires premières relatives à une surface donnée* S^n *est une surface* $Q^{4(n-2)}$ *du degré* $4(n-2)$: c'est une conséquence de (**18**).

22. *Le lieu des points doubles des surfaces* $\overline{n-2}^{\text{ièmes}}$ *polaires d'une surface donnée* S^n, *donc le lieu des sommets des cônes du second degré polaires de* S^n, *est une surface* $P^{4(\overline{n-2})^3}$, *de degré* $4(\overline{n-2})^3$.

Cette surface et la précédente (**21**) sont les *surfaces nodales conjuguées* de la surface S^n; cette expression, en ce qui concerne la surface $Q^{4(n-2)}$ est, plus particulièrement encore, justifiée par le théorème suivant :

23. *La surface nodale* $Q^{4(n-2)}$ *passe par les points doubles de la proposée, si elle en possède, et de même par ses courbes doubles, si elle en est douée.*

Dans tous les cas, elle coupe S^n suivant une courbe gauche du degré $4n(n-2)$ qu'on nomme la *ligne des points d'inflexion* ou *des points paraboliques* de cette surface. J'aurai occasion prochainement de revenir sur ce sujet.

Golfe du Mexique, 29 septembre 1862.

PROPRIÉTÉS RELATIVES A DES NOMBRES PREMIERS.

Par M. Ad. GUIBERT.

Lagrange a justifié, sur les nombres premiers en progression arithmétique, certaines propriétés avancées par Waring [*]; l'objet du théorème suivant est d'en donner une démonstration générale et succincte qui nous semblait désirable.

THÉORÈME.

n étant impair > 3, soit la progression arithmétique croissante $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ de n termes premiers :

1° *Tout nombre premier qui ne surpasse point n, si ce n'est 1, n'entre point dans la progression; quand n est premier, s'il est un terme de cette suite, il est au premier rang.*

2° *La raison r de la progression est divisible par chacun des nombres premiers qui ne surpassent point n, et par n lui-même, s'il est premier et s'il n'entre point dans la progression.*

Pour établir la première partie du théorème, distinguons deux cas, celui de $p_1 = 1$ et celui de $p_1 > 1$.

Soit $p_1 = 1$. On va prouver que p_2 n'est jamais égal à n, si n est premier, ni moindre que n, si l'impair n n'est pas premier.

Admettons, si elle est possible, la progression

$$1,\ n,\ p_3, \ldots,\ p_n.$$

Le terme du rang $n - 2$ serait égal à $1 + (n-1)(n-3)$, qui est le carré de $n - 2$, nombre > 1; ce terme serait donc composé, ce qui est contraire à la supposition.

[*] *Voyez* le *Nouveau Recueil des Mémoires de l'Académie de Berlin* pour 1771.

Soit maintenant la progression

$$1,\ n-2\delta,\ p_3, \ldots,\ p_n.$$

L'entier positif δ étant au moins égal à 1 et au plus égal à $\frac{n-3}{2}$; il y aurait un terme du rang $n+2\delta+2$, et il serait exprimé par

$$1+(n-2\delta-1)(n-2\delta+1),$$

qui est le carré de $n-2\delta$, nombre >1.

Lorsque p_1 est >1, admettons que l'on ait $p_1 = n-2\delta$, δ étant un entier positif au moins égal à 1; il y aurait alors un terme du rang $n-2\delta+1$, dont la valeur $n-2\delta+r(n-2\delta)$ est celle d'un nombre composé.

Donc, aucun nombre premier, autre que 1, ne surpassant point n, ne peut être un terme de la progression.

Mais si p_1, autre que 1, ne saurait être moindre que n, il se peut qu'il lui soit égal, comme on le voit dans les exemples qui suivent :

$$n=5; \quad 5,\ 11,\ 17,\ 23,\ 29;$$
$$n=7; \quad 7,\ 157,\ 307,\ 457,\ 607,\ 757,\ 907.$$

Ainsi, quand n est premier, s'il entre dans la progression, il s'y trouve au premier rang.

Passons à la seconde partie du théorème.

Soit p un nombre premier quelconque moindre que n ou égal à n au plus, quand n est premier et s'il n'entre point dans la progression; divisons par p les p termes consécutifs à partir de p_1; parmi les p restes obtenus, deux au moins seront égaux; dès lors la différence des deux termes qui les ont fournis est divisible par p; mais cette différence est un multiple de la raison r, moindre que pr; donc p divise r.

Remarque. — Lorsque $n=3$, le théorème est en défaut dans les deux progressions

$$1,\ 2,\ 3; \qquad 1,\ 3,\ 5.$$

La première est la seule progression arithmétique entre des nombres

premiers où 2 puisse entrer; elles contiennent, l'une et l'autre, un terme égal à 3.

Si l'on a une progression arithmétique entre trois nombres premiers dont 3 ne fasse point partie, la raison sera divisible par 2×3.

La division de la raison par 2 est manifeste d'après ce qu'on vient de dire, et celle par 3 résulte du raisonnement employé dans la seconde partie du théorème, lequel subsiste encore ici, en faisant $p = 3$.

EXTRAIT D'UNE LETTRE DE M. LE BESGUE A M. LIOUVILLE.

« ... Le moyen que j'ai employé dans votre Journal, t. VIII, pour prouver qu'il y a une infinité de nombres premiers de la forme $2pz+1$, le nombre p étant premier, peut servir aussi à montrer qu'il y a une infinité de nombres premiers de la forme $2pz-1$.

» Soit

$$\varphi(x) = x^{p-1} + x^{p-2} + \ldots + x + 1,$$

$$\psi\left(x+\frac{1}{x}\right) = 1 + x + \frac{1}{x} + x^2 + \frac{1}{x^2} + \ldots + x^{\frac{p-1}{2}} + \frac{1}{x^{\frac{p-1}{2}}};$$

en posant

$$x + \frac{1}{x} = y,$$

on aura, en faisant $p = 2q+1$,

$$\psi(y) = y^q - (q-1)y^{q-2} + \frac{q-2.q-3}{1.2}y^{q-4} - \frac{q-3.q-4.q-5}{1.2.3}y^{q-6} + \ldots,$$

$$+ y^{q-1} - (q-2)y^{q-3} + \frac{q-3.q-4}{1.2}y^{q-5} - \frac{q-4.q-5.q-6}{1.2.3}y^{q-7} + \ldots.$$

(*Théorie des Nombres* de Legendre, t. II, p. 209.)

» Il est prouvé que la fonction $\varphi(x)$, quand on donne à x des valeurs entières, n'a pas d'autres diviseurs premiers que p et des nombres de la forme $2pz+1$. De même la fonction $\psi(y)$, pour y entier, n'a pas d'autres diviseurs premiers que p et des nombres des deux formes $2pz+1$, $2pz-1$. Pour la généralisation de ces théorèmes, il faut voir le Mémoire de M. Kummer sur les diviseurs de certaines formes de nombres qui résultent de la théorie de la division du cercle. (*Journal de M. Liouville*, 2e série, t. V.)

» Il est à remarquer que

$$\varphi(x) = \frac{x^p - 1}{x - 1}$$

donne, en faisant $x = 1 + u$,

$$\varphi(1+u) = \theta(u) = u^{p-1} + pu^{p-2} + \frac{p.p-1}{1.2}u^{p-3} + \ldots + \frac{p.p-1}{1.2}u + p.$$

» $\theta(u)$ ne peut être multiple de p que pour u multiple de p, et p^2 n'est jamais diviseur de $\theta(u)$.

» Comme pour une valeur entière de u non multiple de p, $\theta(u)$ est un nombre entier impair de la forme

$$pA + 1,$$

il aura nécessairement des facteurs premiers de la forme $2pz + 1$, car il n'en saurait avoir d'autres. Soient

$$p_1, \quad p_2, \ldots, \quad p_n,$$

de tels facteurs premiers; en posant

$$U = p_1 p_2 \ldots p_n,$$

il viendra

$$\theta(U) = pA + 1,$$

et ce nombre, qui ne saurait être divisible par p_1, $p_2, \ldots$, donnera nécessairement un ou plusieurs nouveaux nombres premiers de cette forme. Il y a donc un nombre infini de tels nombres premiers.

» Il faut remarquer également que si dans $\psi(y)$ on change y en $u+2$, on aura pour

$$\psi(u+2) = \xi(u)$$

la valeur suivante

$$\begin{aligned}\xi(u) = (2q+1)\Big[1 &+ \frac{q+1.q}{1.2}.\frac{u}{3} + \frac{q+2.q+1.q.q-1}{1.2.3.4}\frac{u^2}{5} + \ldots \\ &+ \frac{(q+q-1)\ldots q.q-1\ldots 2}{1.2.3\ldots 2q-2}\,\frac{u^{q-1}}{2q-1} \\ &+ \frac{q+q\ldots q+1.q\ldots 1}{1.2\ldots 2q}.\frac{u^q}{2q+1}\Big];\end{aligned}$$

le coefficient de u^q se réduit à l'unité, les coefficients des autres puissances de u sont des entiers multiples de $p = 2q + 1$.

» La vérification est plus longue que difficile; il suffira de dire ici que si l'on pose

$$x = \cos 2z + \sin 2z\sqrt{-1},$$

on aura

$$x + \frac{1}{x} = 2\cos 2z$$

et

$$\psi\left(x + \frac{1}{x}\right) = 1 + 2(\cos 2z + \cos 4z + \ldots + \cos 2qz) = \frac{\sin(2q+1)z}{\sin z}.$$

» La valeur de $\xi(u)$ donnée plus haut, en y changeant le signe de u, n'est autre que la formule (6) de la page 233 de l'*Analyse algébrique* de Cauchy, où l'on aurait remplacé m par $2q + 1$ et $(2\sin z)^2$ par u.

» Le nombre entier $\xi(u)$, répondant à une valeur entière de u, ne peut être divisible par p que pour u multiple de p, et il n'est jamais multiple de p^2. Quand u n'est pas multiple de p, comme l'on a

$$u^{\frac{p-1}{2}} = pQ \pm 1,$$

le nombre $\xi(u)$ aura la forme $pQ + 1$ ou $pQ - 1$, selon que u sera résidu ou non résidu quadratique de p.

» En prenant pour u un nombre entier non-résidu quadratique de p, le nombre entier impair

$$\xi(u) = pA - 1$$

donnera nécessairement un ou plusieurs diviseurs premiers de la forme $2pz - 1$, et ces nombres

$$p_1,\ p_2,\ p_3,\ \ldots,\ p_k$$

en fourniront d'autres. Si n est un non-résidu quadratique de p, on donnera pour valeur à u celui des deux nombres

$$p_1 p_2 \ldots p_k,\quad np_1 p_2 \ldots p_k,$$

qui sera non-résidu quadratique de p, et l'on aura ainsi un nombre $p\mathrm{Q} - 1$, non divisible par $p_1, p_2, \ldots p_k$, et qui aura nécessairement un ou plusieurs autres diviseurs premiers de la forme $2pz - 1$, d'où l'on doit conclure que ces diviseurs sont en nombre infini.

» *N. B.* — Pour $p = 3$, $\psi(y) = 1 + y$ peut avoir 2 pour diviseur. La démonstration de ce cas ne présente aucune difficulté et se trouve immédiatement en remarquant que tout nombre $6z - 1$, qui n'est pas premier, a nécessairement un nombre impair de diviseurs premiers de la forme $6y - 1$, puisque, à l'exception de 3 et 2, tous les nombres premiers sont contenus dans les formules $6x + 1$, $6x - 1$.

» Je reviendrai ailleurs sur le théorème de M. Kummer, propriété importante des équations que Gauss a nommées *auxiliaires* pour la résolution de l'équation $x^p = 1$. »

SUR LA FORME
$x^2 + 8y^2 + 64(z^2 + t^2)$;

Par M. J. LIOUVILLE.

La détermination du nombre N des représentations d'un entier donné, par la forme

$$x^2 + 8y^2 + 64(z^2 + t^2)$$

est devenue très-facile pour nous quand cet entier est pair. D'abord, s'il est impairement pair, on a évidemment $N = 0$. Et s'il est pairement pair, de façon qu'on puisse le représenter par $2^\alpha m$, m étant impair et $\alpha > 1$, l'équation

$$2^\alpha m = x^2 + 8y^2 + 64(z^2 + t^2)$$

exigera que x soit pair : en remplaçant x par $2x$ et divisant par 4, elle se réduira donc à celle-ci :

$$2^{\alpha-2} m = x^2 + 2y^2 + 16(z^2 + t^2),$$

que nous avons discutée dans le cahier de Mai.

Quant au cas d'un entier impair m, il est visible que l'on a $N = 0$ si m est $\equiv 3, 5$, ou $7 \pmod{8}$. Nous n'avons donc à nous occuper que du cas où $m = 8\mu + 1$; et voici comment alors nous calculerons N.

On cherchera d'abord, pour la valeur donnée de m, la valeur de la fonction $\omega_1(m)$ définie comme d'ordinaire par les équations

$$m = d\delta, \quad \omega_1(m) = \sum (-1)^{\frac{\delta^2-1}{8}} d.$$

Mais trois autres fonctions numériques devront être jointes à celle-là.

L'une d'elles se rapporte à l'équation

$$m = r^2 + 2u^2$$

où l'entier r est pris positivement, tandis que l'on admet pour u des valeurs positives ou négatives, et aussi la valeur zéro; c'est

$$\sum (-1)^{\frac{r-1}{2}} r.$$

Il faut calculer de même la somme

$$\sum (-1)^{\frac{i-1}{2}+\frac{i^2-1}{8}} i,$$

relative à l'équation

$$m = i^2 + 4s^2$$

où i est essentiellement positif, mais s positif, nul ou négatif.

Puisque $m = 8\mu + 1$, il est clair que l'entier s ne peut être que pair dans l'équation

$$m = i^2 + 4s^2;$$

mais le cas où s est pairement pair donne lieu à une équation nouvelle que j'écrirai ainsi

$$m = q^2 + 64\nu^2,$$

en supposant toujours q positif, et ν positif, nul ou négatif. De là résultera la somme

$$\sum (-1)^{\frac{q-1}{2}+\frac{q^2-1}{8}} q,$$

la dernière dont nous ayons à tenir compte.

La valeur de N est en effet

$$\mathrm{N} = \frac{1}{4}\omega_1(m) + \frac{1}{4}\sum (-1)^{\frac{r-1}{2}} r + \frac{1}{2}\sum (-1)^{\frac{i-1}{2}+\frac{i^2-1}{8}} i + \sum (-1)^{\frac{q-1}{2}+\frac{q^2-1}{8}} q,$$

ou, sous forme abrégée,

$$N = \frac{1}{4}\omega_1(m) + \frac{1}{4}\sum_1 + \frac{1}{2}\sum_2 + \sum_3,$$

en distinguant par des indices nos sommes $\sum$ prises dans l'ordre même où nous les avons introduites.

Ajoutons quelques exemples; et d'abord soit $m = 1$, d'où $\omega_1(m) = 1$. Comme on a

$$1 = 1^2 + 2.0^2 = 1^2 + 4.0^2 = 1^2 + 64.0^2,$$

les trois sommes $\sum$ seront égales à l'unité. De là

$$N = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1 = 2,$$

valeur exacte comme le prouve l'équation

$$1 = (\pm 1)^2 + 8.0^2 + 64(0^2 + 0^2).$$

Soit ensuite $m = 9$, d'où $\omega_1(m) = 7$. Comme on a

$$9 = 3^2 + 2.0^2 = 1^2 + 2(\pm 2)^2,$$

il viendra

$$\sum(-1)^{\frac{r-1}{2}} r = -3 + 2.1 = -1.$$

Les équations

$$9 = 3^2 + 4.0^2, \quad 9 = 3^2 + 64.0^2$$

donneront ensuite

$$\sum(-1)^{\frac{i-1}{2}+\frac{i^2-1}{8}} i = 3, \quad \sum(-1)^{\frac{q-1}{2}+\frac{q^2-1}{8}} q = 3.$$

De là

$$N = \frac{7}{4} - \frac{1}{4} + \frac{3}{2} + 3 = 6,$$

valeur vérifiée par les identités

$$9 = (\pm 3)^2 + 8.0^2 + 64(0^2 + 0^2),$$
$$9 = (\pm 1)^2 + 8(\pm 1)^2 + 64(0^2 + 0^2),$$

qui fournissent pour l'entier 9 six représentations.

Pour $m = 17 = 3^2 + 2(\pm 2)^2 = 1^2 + 4(\pm 2)^2$, il vient

$$\sum (-1)^{\frac{r-1}{2}} r = -6, \quad \sum (-1)^{\frac{i-1}{2}+\frac{i^2-1}{8}} i = 2.$$

L'équation $17 = q^2 + 64 v^2$ étant impossible, la somme qui s'y rapporte est nulle. Enfin $\omega_1(17) = 18$. Donc

$$\mathrm{N} = \frac{18}{4} - \frac{6}{4} + \frac{2}{2} = 4;$$

et en effet on n'a pour 17 que les quatre représentations fournies par

$$17 = (\pm 3)^2 + 8(\pm 1)^2 + 64(0^2 + 0^2).$$

Soit, comme dernier exemple, $m = 65$. L'équation

$$65 = r^2 + 2u^2$$

étant impossible, la somme qui lui correspond sera nulle. Mais les équations

$$65 = 1^2 + 4(\pm 4)^2 = 7^2 + 4(\pm 2)^2$$

et

$$65 = 1^2 + 64(\pm 1)^2$$

donneront

$$\sum (-1)^{\frac{i-1}{2}+\frac{i^2-1}{8}} i = -12, \quad \sum (-1)^{\frac{q-1}{2}+\frac{q^2-1}{8}} q = 2.$$

D'ailleurs $\omega_1(65) = 48$. De là

$$\mathrm{N} = \frac{48}{4} - \frac{12}{2} + 2 = 8.$$

Or l'entier 65 a en effet huit représentations fournies par les identités

$$65 = (\pm 1)^2 + 8.0^2 + 64[(\pm 1)^2 + 0^2],$$
$$65 = (\pm 1)^2 + 8.0^2 + 64[0^2 + (\pm 1)^2],$$

et l'on verra sans peine qu'il n'en a pas d'autre, en observant qu'il n'est pas de la forme $x^2 + 8y^2$.

NOUVELLE THÉORIE

DES

FONCTIONS DE VARIABLES IMAGINAIRES;

PAR M. MAXIMILIEN MARIE,
Répétiteur à l'École Polytechnique.

QUATRIÈME PARTIE.

DES ANGLES IMAGINAIRES ET DE LA COURBURE DES COURBES ET SURFACES IMAGINAIRES.

(Fin.)

CHAPITRE XI.

Des angles au centre du cercle imaginaire et de la courbure d'une conjuguée quelconque en un quelconque de ses points.

Des angles au centre du cercle imaginaire.

156. *Insuffisance du cercle réel.* — Les droites représentées par l'équation

$$y = (m + n\sqrt{-1})x + p + q\sqrt{-1}$$

partent toutes du point $x = -\frac{q}{n}$, $y = p - \frac{mq}{n}$, et sont respectivement parallèles à celles de mêmes caractéristiques que représente l'équation $y = (m + n\sqrt{-1})x$.

Si l'on cherche l'angle $\varphi + \psi\sqrt{-1}$ dont la tangente serait $m + n\sqrt{-1}$, on trouve

$$m \operatorname{tang}^2\varphi - (m^2 + n^2 - 1)\operatorname{tang}\varphi - m = 0$$

et

$$n\sqrt{-1}\operatorname{tang}^2(\psi\sqrt{-1}) + (m^2 + n^2 + 1)\operatorname{tang}(\psi\sqrt{-1}) - n\sqrt{-1} = 0;$$

les deux valeurs de $\tang\varphi$ sont réciproques et de signes contraires, ainsi que celles de $\tang(\psi\sqrt{-1})$; il en résulte que les valeurs de φ sont renfermées dans les formules

$$k\pi + \varphi \quad \text{et} \quad k\pi + \frac{\pi}{2} + \varphi,$$

et celles de $\psi\sqrt{-1}$ dans les formules

$$k\pi + \psi\sqrt{-1} \quad \text{et} \quad k\pi + \frac{\pi}{2} + \psi\sqrt{-1}.$$

D'un autre côté, comme l'équation

$$\tang(\varphi + \psi\sqrt{-1}) = m + n\sqrt{-1}$$

n'admet que les solutions renfermées dans la formule $k\pi + \varphi + \psi\sqrt{-1}$, il en résulte que si $k\pi+\varphi$ et $k\pi+\psi\sqrt{-1}$ sont des valeurs conjointes des angles inconnus, les autres seront $k\pi + \frac{\pi}{2} + \varphi$ et $k\pi + \frac{\pi}{2} + \psi\sqrt{-1}$.

157. Ainsi, bien que l'équation

$$y = (m + n\sqrt{-1})x$$

représente une infinité de droites, la recherche des angles que ces droites font avec l'axe des x, instituée comme elle vient de l'être, ne fournirait que les angles

$$k\pi + \varphi + \psi\sqrt{-1},$$

auxquels il ne correspondrait, dans le cercle réel, conformément à ce qui a été dit dans le chapitre précédent, que deux directions opposées, qui, par conséquent, ne se rapporteraient qu'à une seule droite.

Cette droite du faisceau

$$y = (m + n\sqrt{-1})x,$$

dont l'angle avec l'axe des x se trouve défini dans l'équation

$$\tang(\varphi + \psi\sqrt{-1}) = m + n\sqrt{-1},$$

peut être aisément distinguée des autres : c'est l'une des asymptotes communes aux deux hyperboles conjuguées de l'ellipse nulle

$$(y - mx)^2 + n^2 x^2 = 0,$$

qui ont les mêmes axes de symétrie qu'elle. En effet, si l'on rapporte le lieu

$$y = (m + n\sqrt{-1})x = x \operatorname{tang}(\varphi + \psi\sqrt{-1})$$

aux axes de l'ellipse

$$(y - mx)^2 + n^2 x^2 = 0,$$

d'une part, l'équation prendra la forme

$$y = n'\sqrt{-1}\,x,$$

et de l'autre l'angle $\varphi + \psi\sqrt{-1}$ n'aura dû être altéré que par la soustraction de l'angle réel dont on aura fait tourner l'axe des x.

On voit par là : 1° que l'angle φ devait être l'inclinaison sur l'axe des x de l'un des deux axes de symétrie de l'ellipse

$$(y - mx)^2 + n^2 x^2 = 0,$$

ce qui explique pourquoi l'on a trouvé pour φ les valeurs

$$k\pi + \varphi \quad \text{et} \quad k\pi + \frac{\pi}{2} + \varphi;$$

2° que si l'on a pris pour nouvel axe des x le grand axe de l'ellipse

$$(y - mx)^2 + n^2 x^2 = 0,$$

n' étant alors moindre que 1, $n'\sqrt{-1}$ pourra être la tangente d'un angle imaginaire sans partie réelle, qui dès lors ne différera pas de $\psi\sqrt{-1}$.

Enfin comme l'angle réel μ qui correspond à un angle imaginaire

$\psi\sqrt{-1}$, sans partie réelle, est défini par l'équation

$$\operatorname{tang}\mu = \frac{\operatorname{tang}(\psi\sqrt{-1})}{\sqrt{-1}},$$

la direction cherchée sera en définitive

$$y = \frac{n'\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}}x = n'x,$$

c'est-à-dire qu'elle coïncidera avec celle de l'une des asymptotes de l'hyperbole

$$y^2 - n'^2 x^2 = 0,$$

construite sur les axes de l'ellipse

$$(y - mx)^2 + n^2x^2 = 0.$$

158. Il convient toutefois de signaler ici une exception remarquable aux conclusions portées dans les deux numéros précédents.

Si à l'ellipse

$$(y - mx)^2 + n^2x^2 = 0$$

on substituait le cercle

$$y^2 + x^2 = 0,$$

ce cercle ayant une infinité de systèmes d'axes de symétrie rectangulaires, la droite du faisceau

$$y = \sqrt{-1}\,x,$$

à laquelle s'appliqueraient les résultats des calculs précédents, deviendrait indéterminée; ou plutôt, les conclusions précédentes convenant également bien à toutes les droites du faisceau, l'angle $\varphi + \psi\sqrt{-1}$, fourni par le calcul, devrait donner l'inclinaison, sur l'axe des x, d'une quelconque des droites du faisceau.

C'est en effet ce qui est : l'équation

$$\operatorname{tang}(\varphi + \psi\sqrt{-1}) = m + n\sqrt{-1}$$

se décompose en

$$n\sqrt{-1}\,\text{tang}\,\varphi\,.\,\text{tang}\,(\psi\sqrt{-1}) + \text{tang}\,\varphi - m = 0$$

et

$$m\,\text{tang}\,\varphi\,\text{tang}\,(\psi\sqrt{-1}) + \text{tang}\,(\psi\sqrt{-1}) - n\sqrt{-1} = 0,$$

qui, si l'on y fait $m = 0$ et $n = 1$ donnent

$$\text{tang}\,(\psi\sqrt{-1}) = \sqrt{-1}$$

et

$$\text{tang}\,\varphi = \frac{0}{0},$$

ce qui s'accorde avec les prévisions énoncées : l'angle $\psi\sqrt{-1}$ est infini, il correspond à 45° réels et l'angle φ reste complétement indéterminé. L'angle $\varphi + \psi\sqrt{-1}$ que donne le calcul convient donc à l'inclinaison sur l'axe des x d'une quelconque des droites du faisceau.

Cette exception est remarquable en ce que la question qui nous occupe, de représenter les inclinaisons sur l'axe des x des droites qui composent un même faisceau, se trouve ainsi capable d'une solution complète, sans l'intervention d'aucun artifice nouveau, quand il s'agit d'un faisceau *circulaire*

$$y = \sqrt{-1}\,x,$$

tandis qu'elle ne pourra être résolue pour un faisceau *elliptique*

$$y = (m + n\sqrt{-1})\,x,$$

qu'en employant de nouveaux moyens.

Quoi qu'il en soit, l'angle que fait avec l'axe des x la droite du faisceau

$$y = \sqrt{-1}\,x,$$

dont la caractéristique est C, se trouve représenté par

$$\varphi + \infty\sqrt{-1},$$

si φ désigne l'angle dont la tangente est $-\frac{1}{C}$, ou l'angle que fait avec l'axe des x le diamètre transverse de la conjuguée du cercle que rencontre la droite considérée.

159. On pourrait regarder le faisceau elliptique

$$y = (m + n\sqrt{-1})\,x$$

comme la projection d'un faisceau circulaire,

$$y = \sqrt{-1}\,x,$$

tracé dans un plan oblique au plan des coordonnées, et qui, le coupant suivant le grand axe de l'ellipse

$$(y - mx)^2 + n^2 x^2 = 0,$$

ferait avec lui un angle ayant pour cosinus le rapport du petit au grand axe de cette ellipse.

Cette manière de concevoir le faisceau elliptique suffirait à la représentation graphique; mais je ne pense pas qu'il soit possible d'en tirer la formule de l'angle d'une quelconque des droites qui le composent, avec l'axe des x.

160. Ce qui particularise l'angle imaginaire défini par l'équation

$$\operatorname{tang}(\varphi + \psi\sqrt{-1}) = m + n\sqrt{-1},$$

et en restreint l'appartenance à une seule droite du faisceau

$$y = (m + n\sqrt{-1})\,x,$$

c'est évidemment qu'il est pris dans le cercle réel

$$y^2 + x^2 = 1;$$

et, en effet, le faisceau

$$y = (m + n\sqrt{-1})\,x,$$

ne coupant le cercle

$$y^2 + x^2 = 1,$$

qu'en deux points diamétralement opposés, l'angle $\varphi + \psi\sqrt{-1}$ défini par l'équation

$$\operatorname{tang}(\varphi + \psi\sqrt{-1}) = (m + n\sqrt{-1}),$$

ne pouvait être que l'angle avec l'axe des x du diamètre qui passe par ces deux points.

C'est au reste ce que l'on vérifiera aisément en constatant que les points de rencontre dont il s'agit, appartiennent effectivement à la droite du faisceau à laquelle convient l'angle trouvé.

Si l'on suppose qu'on ait pris pour axe des x le grand axe de l'ellipse

$$(y - mx)^2 + n^2x^2 = 0,$$

l'équation de ce lieu sera devenue

$$y^2 + n'^2x^2 = 0,$$

où n'^2 sera moindre que 1; l'équation du faisceau sera donc alors

$$y = n'\sqrt{-1}\,x;$$

quant à l'équation du cercle réel, elle sera restée

$$y^2 + x^2 = 1;$$

mais d'ailleurs les points de rencontre du faisceau avec le cercle n'auront point changé.

Or les coordonnées actuelles de ces points seront

$$x = \frac{1}{\sqrt{1 - n'^2}}$$

et

$$y = \frac{n\sqrt{-1}}{\sqrt{1 - n'^2}},$$

et représenteront le point

$$x = \frac{1}{\sqrt{1 - n'^2}}, \quad y = \frac{n'}{\sqrt{1 - n'^2}},$$

qui appartient bien à la droite

$$y = n'x$$

du faisceau, à laquelle se rapportait, comme on l'a vu, l'angle

$$\varphi + \psi\sqrt{-1}.$$

161. Ce qu'on vient de dire montre clairement ce qu'il y a à faire pour comprendre indifféremment, dans le calcul, toutes les droites d'un même faisceau

$$y = (m + n\sqrt{-1})x:$$

la méthode devra évidemment consister à substituer au cercle réel

$$y^2 + x^2 = 1,$$

un cercle imaginaire

$$y^2 + x^2 = (r + r'\sqrt{-1})^2,$$

où r et r' puissent être déterminés de manière que les points d'intersection de ce cercle imaginaire et du faisceau

$$y = (m + n\sqrt{-1})x,$$

appartiennent à telle droite que l'on voudra du faisceau.

162. *Du cercle imaginaire à centre réel.* — Nous avons dans le chapitre IX ébauché la discussion des conjuguées du cercle imaginaire, dans le cas général, où son équation se présente sous la forme

$$(x - a - a'\sqrt{-1})^2 + (y - b - b'\sqrt{-1})^2 = (r + r'\sqrt{-1})^2:$$

nous allons revenir ici, avec plus de détails, sur le cas particulier, qui doit seul nous occuper dans ce chapitre, où le cercle imaginaire ayant son centre réel, son équation serait de la forme

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = (r + r'\sqrt{-1})^2,$$

et pourrait, par conséquent, être réduite à

$$x^2+y^2=(r+r'\sqrt{-1})^2,$$

par un simple changement d'origine.

L'enveloppe imaginaire des conjuguées du lieu

$$y^2+x^2=(r+r'\sqrt{-1})^2$$

est le cercle

$$y^2+x^2=(r+r')^2;$$

si

$$x=\alpha+\beta\sqrt{-1}$$

et

$$y=\alpha'+\beta'\sqrt{-1}$$

sont les coordonnées d'un point de cette enveloppe, α, α', β et β' satisferont aux équations

$$\alpha^2+\alpha'^2=r^2,$$
$$\beta^2+\beta'^2=r'^2$$

et

$$\frac{\alpha}{\alpha'}=\frac{\beta}{\beta'}=\frac{1}{C}.$$

Les deux points où la conjuguée C touchera l'enveloppe seront donc aux extrémités de son diamètre couché sur la droite

$$y=Cx.$$

Toutes les conjuguées du lieu étant égales et superposables, puisque l'équation ne change pas lorsqu'on fait tourner les axes d'un angle quelconque autour de l'origine, il suffira de discuter, par exemple, celle qui a ses abscisses réelles.

Si l'on ne donne à x que des valeurs réelles, celle de y pourra s'écrire

$$\begin{aligned}y &= \sqrt{r^2-r'^2-x^2+2rr'\sqrt{-1}},\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{(r^2-r'^2-x^2)^2+4r^2r'^2}+r^2-r'^2-x^2}\\ &\quad+\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{-1}\sqrt{\sqrt{(r^2-r'^2-x^2)^2+4r^2r'^2}-r^2+r'^2+x^2}.\end{aligned}$$

Les deux radicaux devant être affectés du même signe ou de signes contraires, suivant que r et r' seront eux-mêmes de même signe ou de signes contraires.

La courbe est symétrique par rapport aux deux axes de coordonnées; elle touche l'enveloppe aux extrémités de son diamètre dirigé suivant l'axe des y, puisque sa caractéristique est infinie; d'ailleurs, en faisant $x = 0$, on trouve

$$y = \pm (r + r'\sqrt{-1}).$$

Le faisceau des asymptotes de toutes les conjuguées étant représenté par l'équation

$$y = \pm \sqrt{-1}\, x,$$

celles de la courbe qui nous occupe se confondent donc avec les bissectrices des angles des axes.

La figure de cette courbe change considérablement lorsque change l'ordre de grandeur de r^2 et de r'^2. En effet, le rayon de courbure de la courbe au point où elle touche son enveloppe est

$$\pm \frac{r^2 + r'^2}{r - r'},$$

d'ailleurs les deux courbures sont de même sens ou de sens contraires, suivant que r^2 est plus grand ou plus petit que r'^2.

Lors donc que r'^2 est plus grand que r^2, la courbe tournant sa convexité à l'enveloppe, s'éloigne peu de la figure de l'hyperbole équilatère qui toucherait l'enveloppe aux mêmes points; toutefois elle embrasse cette hyperbole, car son rayon de courbure

$$\pm \frac{r^2 + r'^2}{r - r'}$$

est toujours plus grand que celui de l'hyperbole qui est

$$\pm (r + r').$$

En effet, si r' est positif, comme il est plus grand en valeur absolue

que r, les deux rayons de courbure sont

$$\frac{r^2 + r'^2}{r' - r} \quad \text{et} \quad r' + r;$$

si, au contraire, r' est négatif, il faut prendre pour les deux rayons de ourbure les formules

$$\frac{r^2 + r'^2}{r - r'} \quad \text{et} \quad -(r + r');$$

dans l'un et l'autre cas le premier est plus grand que le second.

Au contraire, lorsque r^2 est plus grand que r'^2, la courbe et l'enveloppe, au point où elles se touchent, ont leurs courbures tournées du même côté. Au reste, le rayon de courbure de la conjuguée est toujours plus grand que celui de l'enveloppe, puisque ce dernier est encore $\pm(r + r')$.

On peut vérifier aisément de la manière suivante ces indications de la théorie : Pour savoir si la courbe coupe ou non ses deux tangentes $y = \pm(r + r')$, posons

$$y = \sqrt{r^2 - r'^2 - x^2 + 2rr'\sqrt{-1}} = z + u\sqrt{-1},$$

les x des points de rencontre cherchés seront dès lors fournis par les équations

$$z^2 - u^2 = r^2 - r'^2 - x^2,$$

$$zu = rr'$$

et

$$z + u = r + r'.$$

Or, les deux dernières donnent

$$z = r \quad \text{et} \quad u = r',$$

ou bien

$$z = r' \quad \text{et} \quad u = r,$$

d'où résultent

$$x^2 = 0,$$

ou bien

$$x^2 = 2(r^2 - r'^2).$$

On voit donc que la courbe ne coupe sa tangente

$$y = r + r'$$

que lorsque r^2 est plus grand que r'^2.

On peut encore remarquer que le rayon de courbure de la courbe, au point où elle touche l'enveloppe, devient infini lorsque $r = r'$. Mais cette condition suppose r et r' de même signe, de sorte que r et r' variant d'une manière continue, si r^2 dépasse r'^2 dans un sens ou dans l'autre, le sens de la courbure de la courbe au point où elle touche son enveloppe, change dans tous les cas, mais avec des circonstances différentes, suivant que r et r' sont alors de même signe ou de signes contraires. Dans le premier cas, le rayon de courbure devient infini au moment où la courbure change de sens, tandis qu'il reste fini à ce moment dans le cas contraire.

Pour se rendre compte de cette singularité, il suffira d'observer que dans le dernier cas, l'enveloppe s'étant trouvée momentanément réduite à un point à l'origine des coordonnées, les branches supérieure et inférieure de la conjuguée se sont rapprochées jusqu'à se toucher en ce point, ensuite de quoi chacune d'elles continuant son mouvement, le point de contact de celle qui touchait l'enveloppe au-dessus de l'axe des x passe au-dessous, et réciproquement; de sorte qu'en réalité la courbure de chacune des branches reste tournée du même côté, comme cela devait être.

Lorsque r^2 est plus grand que r'^2, la courbe affecte deux formes entièrement différentes, selon que r et r' sont de même signe ou de signes contraires. Dans le premier cas, les parties gauche et droite de la branche qui touche l'enveloppe au-dessus de l'axe des x, après être descendues au-dessous de la tangente menée à l'enveloppe au point de contact, remontent sans couper l'axe des x et prennent pour asymptotes les parties supérieures des bissectrices des angles des axes, tandis que dans le cas contraire les mêmes parties coupent l'axe des x et ont pour asymptotes les parties inférieures des bissectrices des angles des axes.

On vérifie ces indications, que la condition de continuité impose suffisamment, en cherchant les points de rencontre de la courbe avec l'axe des x.

Si l'on pose, comme précédemment,

$$y = z + u\sqrt{-1},$$

d'où résultent

$$z^2 - u^2 = r^2 - r'^2 - x^2$$

et

$$zu = rr',$$

on obtiendra les x des points de rencontre de la courbe avec l'axe des x en joignant aux précédentes la condition

$$z + u = 0.$$

Mais $z + u = 0$ et $zu = rr'$ ne sont compatibles qu'autant que r et r' sont de signes contraires, et il en résulte alors

$$x^2 = r^2 - r'^2.$$

Dans le cas où r et r' sont de même signe, la courbe a, d'après ce qu'on vient de dire, deux tangentes horizontales outre les droites $y = \pm(r + r')$. Pour les trouver, il faut faire

$$\frac{d(z+u)}{dx} = 0,$$

on a ainsi à résoudre les équations

$$\begin{aligned} z^2 - u^2 &= r^2 - r'^2 - x^2,\\ zu &= rr',\\ z\frac{dz}{dx} - u\frac{du}{dx} &= -x,\\ z\frac{du}{dx} + u\frac{dz}{dx} &= 0,\\ \frac{dz}{dx} + \frac{du}{dx} &= 0,\end{aligned}$$

ou bien

$$\frac{dz}{dx}(u - z) = 0,$$

$$\frac{dz}{dx}(u + z) = -x,$$

$$zu = rr',$$

$$z^2 - u^2 = r^2 - r'^2 - x^2.$$

Si r et r' étaient de signes contraires, il en serait de même de z et u, de sorte que l'équation

$$\frac{dz}{dx}(u - z) = 0$$

ne donnerait que

$$\frac{dz}{dx} = 0, \qquad \text{d'où} \qquad x = 0, \quad z = \pm r, \quad u = \pm r' :$$

mais si r et r' sont de même signe, on peut satisfaire à l'équation

$$\frac{dz}{dx}(u - z) = 0,$$

en posant

$$u = z,$$

et il en résulte

$$x^2 = r^2 - r'^2, \quad u = z = \pm\sqrt{rr'}.$$

Il serait facile, d'après toutes ces indications, de construire la courbe dans chaque cas distinct.

On peut encore remarquer que, si r' était nul, la courbe se composerait de la circonférence du cercle

$$y^2 + x^2 = r^2,$$

et de l'hyperbole équilatère

$$y^2 - x^2 = -r^2,$$

et que si r était seul, elle se réduirait à l'hyperbole équilatère

$$y^2 - x^2 = r'^2.$$

163. *Des angles au centre du cercle imaginaire.* — Le rayon de l'enveloppe circulaire des conjuguées du lieu

$$y^2 + x^2 = (r + r'\sqrt{-1})^2$$

étant $r + r'$, nous prendrons ce rayon pour unité; en posant d'ailleurs $\frac{r'}{r} = k$, l'équation du cercle deviendra

$$y^2 + x^2 = \left(\frac{1 + k\sqrt{-1}}{1 + k}\right)^2.$$

Si x et y désignent les coordonnées d'un point de ce lieu,

$$x_1 = \frac{x}{\left(\frac{1 + k\sqrt{-1}}{1 + k}\right)} \quad \text{et} \quad y_1 = \frac{y}{\left(\frac{1 + k\sqrt{-1}}{1 + k}\right)}$$

satisferont à l'équation

$$y^2 + x^2 = 1$$

du cercle réel; x_1 et y_1 seront le cosinus et le sinus d'un angle défini analytiquement et géométriquement, $\varphi + \psi\sqrt{-1}$.

Nous avons, dans le chapitre précédent, regardé l'expression $\varphi + \psi\sqrt{-1}$ comme représentant l'inclinaison sur l'axe des x du rayon mené de l'origine au point $[x_1, y_1]$ du cercle réel.

Nous regarderons de même ici l'expression

$$\left(\frac{1 + k\sqrt{-1}}{1 + k}\right)^2 (\varphi + \psi\sqrt{-1}) = \Phi + \Psi\sqrt{-1}$$

comme représentant l'inclinaison sur l'axe des x du rayon mené de l'origine au point $[x, y]$.

Les valeurs conjointes de x et de y lorsque k est donné, déterminent évidemment $\Phi + \Psi\sqrt{-1}$ à un multiple près de

$$2\pi\left(\frac{1 + k\sqrt{-1}}{1 + k}\right)^2.$$

et réciproquement.

164. L'angle $\Phi + \Psi\sqrt{-1}$ est déjà défini géométriquement, d'une manière indirecte, par sa relation avec l'angle $\varphi + \psi\sqrt{-1}$; mais nous allons voir qu'il comporte par rapport à la conjuguée du cercle

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{1 + k\sqrt{-1}}{1 + k}\right)^2,$$

sur laquelle se trouve le point correspondant $[x, y]$, et par rapport à l'enveloppe, une définition directe, analogue à celle que nous avons donnée dans le chapitre précédent de l'angle $\varphi + \psi\sqrt{-1}$ tracé au centre du cercle réel.

Nous supposerons d'abord que le point $[x, y]$ appartienne à la conjuguée $C = 0$ du lieu

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{1 + k\sqrt{-1}}{1 + k}\right)^2,$$

laquelle touche son enveloppe aux extrémités du diamètre couché sur l'axe des x : les autres cas se ramèneront aisément à celui-là, puisque pour effectuer le passage il suffira de faire tourner les axes, d'un angle réel, autour de l'origine.

Supposons que le point $[x, y]$ appartienne à la portion supérieure de la branche de droite de la conjuguée $C = 0$; soient M ce point, P le pied de son ordonnée, A l'extrémité droite du diametre horizontal et O le centre de l'enveloppe.

L'intégrale

$$\int dx\sqrt{(r + r'\sqrt{-1})^2 - x^2}$$

est

$$\frac{1}{2}(r + r'\sqrt{-1})^2\left[\frac{x}{r + r'\sqrt{-1}}\sqrt{1 - \left(\frac{x}{r + r'\sqrt{-1}}\right)^2} - \arccos\frac{x}{r + r'\sqrt{-1}}\right]:$$

si l'on prend pour limite inférieure l'abscisse du point A, c'est-à-dire $r + r'\sqrt{-1}$, on a donc

$$\int_{r + r'\sqrt{-1}}^{x} dz\sqrt{(r + r'\sqrt{-1})^2 - x^2}$$

$$= \frac{1}{2}(r + r'\sqrt{-1})^2\left[\frac{x}{r + r'\sqrt{-1}}\sqrt{1 - \left(\frac{x}{r + r'\sqrt{-1}}\right)^2} - \arccos\frac{x}{r + r'\sqrt{-1}}\right],$$

d'où

$$\arccos \frac{x}{r+r'\sqrt{-1}}$$

$$= -\frac{1}{\frac{1}{2}(r+r'\sqrt{-1})^2}\int_{r+r'\sqrt{-1}}^{x} dx\sqrt{(r+r'\sqrt{-1})^2 - x^2} + \frac{\frac{1}{2}x\sqrt{(r+r'\sqrt{-1})^2 - x^2}}{\frac{1}{2}(r+r'\sqrt{-1})^2}.$$

Or $\sqrt{(r+r'\sqrt{-1})^2 - x^2}$ étant réel, $\frac{1}{2}x\sqrt{(r+r'\sqrt{-1})^2 - x^2}$ en y remplaçant $\sqrt{-1}$ par 1 (tous calculs faits, bien entendu), représenterait l'aire du triangle OMP; d'un autre côté

$$\int_{r+r'\sqrt{-1}}^{x} dx\sqrt{(r+r'\sqrt{-1})^2 - x^2},$$

en y remplaçant aussi $\sqrt{-1}$ par 1, donnerait l'aire du segment AMP; par conséquent en remplaçant de même $\sqrt{-1}$ par 1 dans

$$\frac{1}{2}x\sqrt{(r+r'\sqrt{-1})^2 - x^2} - \int_{r+r'\sqrt{-1}}^{x} dx\sqrt{(r+r'\sqrt{-1})^2 - x^2},$$

on obtiendra l'aire du secteur AOM compris entre la conjuguée et les deux rayons OA et OM.

Ainsi l'arc dont le cosinus est $\frac{x}{r+r'\sqrt{-1}}$ est le rapport à $(r+r'\sqrt{-1})^2$ du double de l'aire du secteur AOM, convenablement décomposée en parties réelle et imaginaire.

En d'autres termes, la somme $\Phi + \Psi$ des deux parties réelle et imaginaire de la quantité $\Phi + \Psi\sqrt{-1}$, définie plus haut, est le double du rapport du secteur AOM au carré $(r+r')^2$.

Pour connaître Φ et Ψ, il resterait donc seulement à savoir comment se décompose

$$\Phi + \Psi.$$

Or l'angle

$$\varphi + \psi\sqrt{-1}$$

est, par hypothèse, tel que son sinus multiplié par $r + r'\sqrt{-1}$ se

trouve réel, puisque ce produit n'est autre que l'y du point décrivant que l'on suppose appartenir à la conjuguée $C = 0$.

Ainsi φ et ψ sont liés par la condition que

$$\sin(\varphi + \psi\sqrt{-1})(r + r'\sqrt{-1})$$

soit réel, c'est-à-dire

$$r'\sqrt{-1}\sin\varphi\cos\psi\sqrt{-1} + r\cos\varphi\sin\psi\sqrt{-1} = 0,$$

d'où

$$\operatorname{tang}\varphi\cot\psi\sqrt{-1} = \frac{r\sqrt{-1}}{r'} = \frac{\sqrt{-1}}{k}.$$

Cette relation entre φ et ψ en fournira une correspondante entre Φ et Ψ, qui, jointe à

$$\Phi + \Psi = \frac{2\operatorname{sect}AOM}{(r+r')^2},$$

achèvera de faire connaître Φ et Ψ.

165. Supposons maintenant que le point $[x, y]$ appartienne à une conjuguée quelconque dont la caractéristique sera $C = -\cot\gamma$, ce qui signifie que la conjuguée C touchera l'enveloppe aux extrémités du diamètre incliné de l'angle γ sur l'axe des x.

On rentrera dans le cas précédent en faisant tourner d'abord les axes de l'angle γ autour de l'origine : par conséquent x' et y' désignant les coordonnées nouvelles d'un point M dont les coordonnées anciennes étaient x et y, B désignant l'extrémité du rayon incliné de l'angle γ sur l'axe des x, Q le pied de la perpendiculaire abaissée du point M sur OB prolongé, $\varphi' + \psi'\sqrt{-1}$ l'angle dont le cosinus et le sinus seraient

$$x'_1 = \frac{x'}{\left(\frac{1+k\sqrt{-1}}{1+k}\right)} \quad \text{et} \quad y'_1 = \frac{y'}{\left(\frac{1+k\sqrt{-1}}{1+k}\right)}:$$

l'angle $\varphi + \psi\sqrt{-1}$ sera égal à

$$\gamma + \varphi' + \psi'\sqrt{-1},$$

par conséquent l'angle $\Phi + \Psi\sqrt{-1}$ aura pour valeur

$$\gamma\left(\frac{1+k\sqrt{-1}}{1+k}\right)^2 + (\varphi' + \psi'\sqrt{-1})\left(\frac{1+k\sqrt{-1}}{1+k}\right)^2.$$

La seconde partie $(\varphi' + \psi'\sqrt{-1})\left(\frac{1+k\sqrt{-1}}{1+k}\right)^2$ de cet angle se lie au double du secteur BOM par les relations qu'on a établies précédemment, et quant à la première, elle représente le produit par $\left(\frac{1+k\sqrt{-1}}{1+k}\right)^2$ du double du secteur AOB.

166. *De l'angle d'un faisceau de droites imaginaires avec l'axe des x.* — Ce qui précède suffira pour expliquer la multiplicité des angles correspondants à un même coefficient angulaire.

Quel que soit le point que l'on considère du lieu

$$y = (m + n\sqrt{-1})x,$$

on trouve que $\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ et $\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ sont toujours le sinus et le cosinus du même angle $\varphi + \psi\sqrt{-1}$; mais ce résultat doit être interprété en ce sens que, quel que soit le point $[x, y]$, le rapport à $\left(\frac{1+k\sqrt{-1}}{1+k}\right)^2$ de l'angle $\Phi + \Psi\sqrt{-1}$, que fait avec l'axe des x le rayon du cercle

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{1+k\sqrt{-1}}{1+k}\right)^2,$$

auquel appartient le point $[x, y]$, donne toujours la même quantité $\varphi + \psi\sqrt{-1}$: quant à l'angle $\Phi + \Psi\sqrt{-1}$, il varie avec k, par conséquent avec x et y.

Pour exprimer l'angle avec l'axe des x d'une droite quelconque du faisceau

$$y = (m + n\sqrt{-1})x,$$

ayant pour caractéristique C, il suffira d'exprimer k en fonction de C

par la condition que le point de rencontre des deux lieux

$$y = (m + n\sqrt{-1})\,x \quad \text{et} \quad y^2 + x^2 = \left(\frac{1 + k\sqrt{-1}}{1 + k}\right)^2$$

appartienne au système C.

Nous supposerons d'abord, pour simplifier le calcul, que le faisceau ait son équation réduite à la forme $y = n\sqrt{-1}$; on rentrera ensuite dans le cas général au moyen d'une transformation de coordonnées.

Les coordonnées du point de rencontre, dans le cas du faisceau $y = n\sqrt{-1}\,x$, sont

$$x = \frac{1 + k\sqrt{-1}}{1 + k}\,\frac{1}{\sqrt{1 - n^2}},$$

$$y = \frac{1 + k\sqrt{-1}}{1 + k}\,\frac{n\sqrt{-1}}{\sqrt{1 - n^2}}.$$

Or n est supposé moindre que 1, les parties imaginaires de y et de x sont donc

$$\beta' = \frac{x}{(1 + k)\sqrt{1 - n^2}} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{k}{(1 + k)\sqrt{1 - n^2}}:$$

la condition pour que le point d'intersection ait pour caractéristique C est donc

$$\frac{\beta'}{\beta} = \frac{n}{k} = \mathrm{C},$$

d'où

$$k = \frac{n}{\mathrm{C}}$$

et

$$\frac{1 + k\sqrt{-1}}{1 + k} = \frac{\mathrm{C} + n\sqrt{-1}}{\mathrm{C} + n}.$$

En conséquence, le cercle imaginaire qui coupe la droite du système C du faisceau est

$$y^2 + x^2 = \left(\frac{\mathrm{C} + n\sqrt{-1}}{\mathrm{C} + n}\right)^2,$$

l'angle que fait cette droite avec l'axe des x, estimé dans le cercle dont elle forme un rayon, est donc $\left(\frac{C+n\sqrt{+1}}{C+n}\right)^2$ arc tang$(n\sqrt{-1})$.

Si le faisceau considéré se trouvait dans une position quelconque par rapport aux axes, son équation serait

$$y=(m+n\sqrt{-1})\,x=x\,\text{tang}(\varphi+\psi\sqrt{-1});$$

la condition de rencontre entre la droite du système C de ce faisceau et le cercle

$$y^2+x^2=\left(\frac{1+k\sqrt{+1}}{1+k}\right)^2$$

se irerait de la formule précédente en substituant à C la tangente de l'angle de la droite $y=Cx$ avec la droite $y=x\,\text{tang}\,\varphi$, c'est-à-dire

$$\frac{C-\text{tang}\,\varphi}{1+C\,\text{tang}\,\varphi};$$

elle deviendrait ainsi

$$\frac{1+k\sqrt{-1}}{1+k}=\frac{\dfrac{C-\text{tang}\,\varphi}{1+C\,\text{tang}\,\varphi}+\text{tang}(\psi\sqrt{-1})}{\dfrac{C-\text{tang}\,\varphi}{1+C\,\text{tang}\,\varphi}+\dfrac{1}{\sqrt{-1}}\,\text{tang}(\psi\sqrt{-1})},$$

de sorte que l'angle que ferait cette droite du système C avec l'axe des x, estimé dans le cercle dont elle forme un rayon, serait

$$\left[\frac{\dfrac{C-\text{tang}\,\varphi}{1+C\,\text{tang}\,\varphi}+\text{tang}(\psi\sqrt{-1})}{\dfrac{C-\text{tang}\,\varphi}{1+C\,\text{tang}\,\varphi}+\dfrac{1}{\sqrt{-1}}(\text{tang}\,\psi\sqrt{-1})}\right]^2(\varphi+\psi\sqrt{-1}).$$

167. *De l'angle de deux faisceaux de droites imaginaires.* — Le calcul appliqué à la recherche de l'angle de deux faisceaux

$$y=(m+n\sqrt{-1})\,x=\text{tang}(\varphi+\psi\sqrt{-1})\,x$$

et

$$y=(m'+n'\sqrt{-1})\,x=\text{tang}(\varphi'+\psi'\sqrt{-1})\,x$$

ne fournit, pour l'angle inconnu, que la seule valeur

$$\varphi' - \varphi + (\psi' - \psi)\sqrt{-1};$$

mais à cette valeur unique correspondent des angles en nombre infini lorsqu'on les recherche au centre de tous les cercles imaginaires dissemblables.

Le résultat obtenu, au reste, peut s'interpréter d'une infinité de manières différentes, puisqu'il se rapporte à deux quelconques des droites de l'un et de l'autre faisceau.

Il signifiera, si l'on veut, que l'angle au centre du cercle

$$y^2 + x^2 = \left(\frac{1 + k\sqrt{-1}}{1 + k}\right)^2,$$

intercepté entre les droites, de caractéristiques différentes, des deux faisceaux, qui coupent ce même cercle, est

$$\left[\varphi' - \varphi + (\psi' - \psi)\sqrt{-1}\right]\left(\frac{1 + k\sqrt{-1}}{1 + k}\right)^2,$$

quantité qui se lie, comme on l'a vu précédemment, à l'aire du secteur de la conjuguée considérée compris entre les deux droites choisies dans l'un et l'autre faisceau.

168. *De l'angle de contingence d'un lieu en un point imaginaire.* — L'équation

$$Y - y = -\frac{f'_x(x,y)}{f'_y(x,y)}(X - x) = (m + n\sqrt{-1})(X - x)$$

représente le lieu $f(x,y) = 0$ dans un espace infiniment petit tracé autour du point $[x, y]$ de ce lieu; c'est-à-dire que les droites du faisceau

$$Y = (m + n\sqrt{-1})X$$

sont parallèles aux tangentes à toutes les courbes que l'on pourrait tracer à partir du point $[x, y]$ dans la portion du plan recouverte par

les conjuguées du lieu

$$f(x, y) = 0.$$

Si l'on donne à x un accroissement infiniment petit,

$$dx = d\alpha + d\beta\sqrt{-1},$$

il en résulte pour y l'accroissement

$$dy = (m + n\sqrt{-1})(d\alpha + d\beta\sqrt{-1}) = md\alpha - nd\beta + (nd\alpha + md\beta)\sqrt{-1},$$

et le point $[x, y]$ a décrit un élément parallèle à la conjuguée

$$C = \frac{nd\alpha + md\beta}{d\beta}$$

du faisceau

$$y = (m + n\sqrt{-1})x.$$

Si le point $[x, y]$ se déplace infiniment peu, $\frac{dy}{dx}$ change et devient

$$\frac{dy}{dx} + \frac{d^2y}{dx^2}dx;$$

en posant donc

$$\frac{d^2y}{dx^2} = p + q\sqrt{-1},$$

le faisceau des éléments du lieu devient

$$y = \left[m + n\sqrt{-1} + (p + q\sqrt{-1})dx\right]x.$$

l'angle de ce nouveau faisceau avec l'ancien

$$y = (m + n\sqrt{-1})x$$

est l'angle de contingence du lieu au point $[x, y]$; il reçoit son interprétation de ce qui précède.

169. *De la courbure d'un lieu en un point imaginaire.* — L'angle

de contingence défini comme il vient de l'être a pour expression

$$\frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx.$$

Le rapport de cet angle à la différentielle de l'abscisse, et par conséquent à l'expression $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, est indépendant du chemin suivi par le point $[x, y]$. Cela ne signifie pas que l'angle que fait le faisceau des éléments du lieu au point $[x, y]$ avec le faisceau voisin reste le même tout autour du point $[x, y]$, mais que le rapport de cet angle à ds ou $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ reste toujours le même.

Ce rapport est la courbure du lieu au point considéré, et cette courbure reçoit de ce qui précède une interprétation simple.

170. *Transformation imaginaire des coordonnées.* — Si dans une équation $f(x, y) = 0$ on remplace x par $x + a + a'\sqrt{-1}$, y par $y + b + b'\sqrt{-1}$, et qu'on suppose en même temps l'origine des coordonnées transportée effectivement au point dont les coordonnées anciennes étaient $x = a + a'$, $y = b + b'$, l'ensemble du lieu représenté par la nouvelle équation, rapporté aux nouveaux axes, coïncidera avec l'ancien lieu; c'est-à-dire que le lieu entier recouvrira les mêmes portions du plan et le même nombre de fois pour chacune d'elles. Mais les conjuguées se trouveront changées; les points d'une des conjuguées du nouveau lieu dériveront en effet par transformation de points pris sur toutes les conjuguées du premier.

La substitution des expressions

$$x\cos\alpha - y\sin\alpha$$

et

$$y\sin\alpha + y\cos\alpha$$

à la place de x et de y, dans une équation $f(x, y) = 0$, a pour effet, lorsque α est réel, ou bien de faire tourner les axes autour de l'origine d'un angle α, de droite à gauche par exemple, en laissant fixe le lieu représenté par l'équation primitive, ou de faire tourner au contraire

de gauche à droite de l'angle α le lieu en question, en laissant les axes primitifs fixes. Les deux opérations rentrent l'une dans l'autre et servent par conséquent aux mêmes usages.

Dans le cas au contraire où l'angle α serait imaginaire sans partie réelle, il serait impossible de considérer la transformation comme revenant à un changement effectif d'axes.

En effet, d'abord le lieu représenté par la nouvelle équation ne sera jamais, sauf un cas particulier que nous examinerons, superposable à l'ancien, c'est-à-dire qu'il ne sera pas seulement transporté, mais en même temps déformé.

D'un autre côté, si l'ouverture effective correspondante à un même angle réel est toujours la même, quel que soit le cercle réel ou imaginaire au centre duquel on place cet angle, ce qui permet de concevoir sans ambiguïté possible une rotation réelle; au contraire l'ouverture réalisée d'un angle imaginaire sans partie réelle dépend essentiellement du rapport $\frac{r'}{r} = k$, qui définit le cercle imaginaire au centre duquel on place cet angle. D'où il résulte que faire tourner les axes, autour de l'origine, d'un angle imaginaire $\alpha\sqrt{-1}$ n'aurait de sens clair qu'autant qu'on aurait choisi d'avance, ce qui ne pourrait se faire qu'arbitrairement, le rapport k des parties imaginaire et réelle du rayon du cercle au centre duquel on devrait compter l'angle $\alpha\sqrt{-1}$.

La question posée doit donc être réduite à savoir comment se déduisent l'un de l'autre les lieux représentés par deux équations

$$f(x, y) = 0$$

et

$$f\left(x\cos\alpha\sqrt{-1} - y\sin\alpha\sqrt{-1},\quad x\sin\alpha\sqrt{-1} + y\cos\alpha\sqrt{-1}\right) = 0,$$

rapportées à un même système d'axes rectangulaires.

Cette question est facile à résoudre.

Si x et y désignent les coordonnées d'un point quelconque du premier lieu et $x'y'$ celles du point correspondant du second, les relations

$$x = x'\cos\alpha\sqrt{-1} - y'\sin\alpha\sqrt{-1}$$

et

$$y = x'\sin\alpha\sqrt{-1} + y'\cos\alpha\sqrt{-1},$$

d'où l'on déduit immédiatement

$$x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2,$$

montrent d'abord que les deux points $[x, y]$ et $[x', y']$ appartiennent au même cercle imaginaire.

Ainsi chacun des points du premier lieu ne s'est déplacé que sur le cercle imaginaire où il se trouvait d'abord.

De plus, les mêmes équations donnent

$$\frac{y}{x} = \frac{\frac{y'}{x'} + \operatorname{tang}\alpha\sqrt{-1}}{1 - \frac{y'}{x'}\operatorname{tang}\alpha\sqrt{-1}},$$

c'est-à-dire

$$\operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x} = \alpha\sqrt{-1} + \operatorname{arc\,tang}\frac{y'}{x'}.$$

Ainsi le point $[x, y]$ s'est déplacé sur le cercle qui le contenait de façon que l'angle décrit par le rayon vecteur eût pour mesure constante $\alpha\sqrt{-1}$.

Si, dans l'équation

$$y^2 + x^2 = (r + r'\sqrt{-1}),$$

on remplace x et y respectivement par

$$x\cos\alpha - y\sin\alpha$$

et

$$x\sin\alpha + y\cos\alpha,$$

elle reste identiquement la même, quel que soit α, réel ou imaginaire, composé d'une ou de deux parties, de sorte que le lieu ne subit aucune modification.

Ce résultat s'explique tout naturellement, car tous les points du lieu

appartenant au même cercle et chacun d'eux ne décrivant qu'un arc de ce cercle, le lieu des nouveaux points ne pouvait pas différer de l'ancien.

171. *Des coordonnées polaires.* — La règle que nous avons adoptée pour figurer les lieux imaginaires représentés par une équation entre les coordonnées rectilignes d'un point, avait été éprouvée dans trop de circonstances diverses pour que nous ne dussions pas renoncer à l'emploi des coordonnées polaires, tant qu'il serait impossible de retrouver dans une équation

$$f(\rho\cos\omega,\ \rho\sin\omega) = 0,$$

les mêmes points qu'avait fournis l'équation

$$f(x,\ y) = 0.$$

Il eût été absurbe d'imaginer arbitrairement un mode de représentation des solutions imaginaires d'une équation en coordonnées polaires, sans se préoccuper de savoir si les lieux, que l'on supposerait dès lors représentés par cette équation, coïncideraient ou non avec ceux qu'avait fournis l'équation correspondante en coordonnées rectilignes.

C'est pourquoi nous nous sommes complétement tu jusqu'ici sur les coordonnées polaires.

Mais la théorie précédente fournit d'elle-même la règle à suivre dans la représentation graphique des coordonnées polaires, lorsqu'elles cessent d'être réelles.

Il est facile de voir que dans l'équation

$$f(\rho\cos\omega,\ \rho\sin\omega) = 0,$$

ω ne doit être regardé que comme la mesure de l'angle que fait avec l'axe des x le rayon vecteur mené au point mobile, l'angle lui-même doit être pris dans le cercle dont le rayon est ρ.

Moyennant cette manière d'entendre les coordonnées polaires, les lieux fournis par les deux équations

$$f(x,\ y) = 0$$

et

$$f(\rho\cos\omega,\ \rho\sin\omega) = 0$$

coïncideront toujours évidemment.

En effet, pour construire l'ensemble des lieux représentés par une équation $f(x, y) = 0$, on pourrait poser $x = \rho\cos\omega$ et $y = \rho\sin\omega$; donnant alors à ω une valeur quelconque $\varphi + \psi\sqrt{-1}$, on trouverait dans le cercle réel de rayon 1, le rayon dont l'angle avec l'axe polaire serait $\varphi + \psi\sqrt{-1}$, les coordonnées de l'extrémité de ce rayon fourniraient les valeurs de $\frac{x}{\rho}$ et de $\frac{y}{\rho}$, qu'il suffirait donc de multiplier par ρ pour obtenir x et y. Or, par cette opération, l'angle $\varphi + \psi\sqrt{-1}$ se trouverait transporté au centre du cercle de rayon ρ, et le point $[x,\ y]$ obtenu appartiendrait à ce cercle.

172. Pour retrouver dans une équation

$$f(\rho\cos\omega,\ \rho\sin\omega) = 0$$

les conjuguées du lieu

$$f(x, y) = 0,$$

il suffira d'assujettir les parties réelles et imaginaires de ρ et de ω à une condition convenable. Cette condition est facile à exprimer.

Soient

$$\rho = r + r'\sqrt{-1} \quad \text{et} \quad \omega = \varphi + \psi\sqrt{-1};$$

les valeurs correspondantes de x et de y seront

$$x = (r + r'\sqrt{-1})\left(\cos\varphi\cos\overline{\psi\sqrt{-1}} - \sin\varphi\sin\overline{\psi\sqrt{-1}}\right),$$
$$y = (r + r'\sqrt{-1})\left(\sin\varphi\cos\overline{\psi\sqrt{-1}} + \cos\varphi\sin\overline{\psi\sqrt{-1}}\right);$$

pour que le rapport des parties imaginaires de y et de x reste constant et égal à la caractéristique C de la conjuguée qu'on voudrait obtenir, il faudra donc que

$$\frac{r\cos\varphi\sin\overline{\psi\sqrt{-1}} + r'\sqrt{-1}\sin\varphi\cos\overline{\psi\sqrt{-1}}}{-r\sin\varphi\sin\overline{\psi\sqrt{-1}} + r'\sqrt{-1}\cos\varphi\cos\overline{\psi\sqrt{-1}}} = \mathrm{C}$$

ou

$$\frac{r'\sqrt{-1}\tan\varphi + r\tan\overline{\psi\sqrt{-1}}}{r'\sqrt{-1} - r\tan\varphi\tan\overline{\psi\sqrt{-1}}} = C,$$

ou encore

$$\frac{\tan\varphi + \dfrac{r\tan\overline{\psi\sqrt{-1}}}{r'\sqrt{-1}}}{1 - \tan\varphi\dfrac{r\tan\psi\sqrt{-1}}{r'\sqrt{-1}}} = C:$$

en posant

$$\tan\gamma = -\frac{1}{C} \quad \text{et} \quad \tan\mu = \frac{r\tan\psi\sqrt{-1}}{r'\sqrt{-1}}.$$

Cette condition revient à

$$\frac{\pi}{2} + \gamma = \varphi + \mu,$$

d'où

$$\mu = \frac{\pi}{2} + \gamma - \varphi;$$

par conséquent

$$\tan(\varphi - \gamma) = \frac{r'\sqrt{-1}}{r\tan(\psi\sqrt{-1})},$$

ou enfin

$$\tan(\varphi - \gamma)\tan\psi\sqrt{-1} = \frac{r'\sqrt{-1}}{r} = k\sqrt{-1},$$

condition très-simple et dont la forme est remarquable.

Quand il s'agit de la conjuguée $C = \infty$, cette condition devient

$$\tan\varphi\tan\psi\sqrt{-1} = k\sqrt{-1}.$$

173. *Application aux courbes du second degré.* — Si l'on veut, dans l'équation

$$\rho = \frac{p}{1 - e\cos\omega},$$

retrouver, par exemple, la conjuguée $C = \infty$ de la courbe réelle qu'elle

représente, il faudra faire $\varphi = 0$ et $r' = 0$; en effet, l'équation

$$r + r'\sqrt{-1} = \frac{p}{1 - e\cos(\varphi + \psi\sqrt{-1})}$$

se décompose en

$$r\left(1 - e\cos\varphi\cos\overline{\psi\sqrt{-1}}\right) + er'\sqrt{-1}\sin\varphi\sin\psi\sqrt{-1} = p$$

et

$$er\sin\varphi\sin\psi\sqrt{-1} + r'\sqrt{-1}\left(1 - e\cos\varphi\cos\overline{\psi\sqrt{-1}}\right) = 0,$$

la dernière donne

$$\frac{r}{r'\sqrt{-1}} = \frac{e\cos\varphi\cos\overline{\psi\sqrt{-1}} - 1}{e\sin\varphi\sin\overline{\psi\sqrt{-1}}},$$

de sorte que la condition à remplir serait

$$\frac{1}{\operatorname{tang}\varphi\operatorname{tang}\overline{\psi\sqrt{-1}}} = \frac{e\cos\varphi\cos\overline{\psi\sqrt{-1}} - 1}{e\sin\varphi\sin\overline{\psi\sqrt{-1}}},$$

d'où

$$\operatorname{tang}\varphi\operatorname{tang}\psi\sqrt{-1} = 0.$$

En faisant $\operatorname{tang}\psi\sqrt{-1} = 0$, on aurait évidemment la courbe réelle; par conséquent on obtiendra la conjuguée $C = \infty$ en faisant $\operatorname{tang}\varphi = 0$, mais alors l'équation

$$er\sin\varphi\sin\overline{\psi\sqrt{-1}} + r'\sqrt{-1}\left(1 - e\cos\varphi\cos\overline{\psi\sqrt{-1}}\right)$$

donne $r' = 0$.

On aurait obtenu ces conditions directement en observant que l'équation proposée donnant

$$\rho - e\rho\cos\omega = p,$$

si $\rho\cos\omega$ est réel, ρ doit l'être aussi, ce qui donne $r' = 0$; d'un autre côté, ρ étant réel, $\cos\omega$ devait l'être aussi, ce qui exigeait que ω fût réel ou imaginaire sans partie réelle.

Théorie des courbures des courbes que l'on peut tracer à partir d'un point $[x, y]$ d'un lieu $f(x, y) = 0$ sur la portion du plan recouverte par les conjuguées de ce lieu.

174. La théorie qui va nous occuper est entièrement analogue à celle des courbures des sections planes qu'on peut obtenir dans une surface à partir d'un point de cette surface.

La courbure d'une courbe définie par une condition complémentaire

$$\varphi(\alpha, \beta, \alpha', \beta') = 0,$$

jointe à l'équation

$$f(x, y) = 0$$

du lieu total, ne dépend en un de ses points $[x, y]$ que de $\frac{d\beta'}{d\beta}$, si la condition φ donne au point $[x, y]$

$$\frac{d^2\beta'}{d\beta^2} = 0,$$

et ne dépend, dans le cas contraire, que de

$$\frac{d\beta'}{d\beta} \quad \text{et de} \quad \frac{d^2\beta'}{d\beta^2}.$$

Dans le premier cas, la courbure de la courbe ne dépend que de la direction de sa première tangente, comme la courbure d'une section normale; dans le second elle dépend de la direction de sa première tangente et d'une quantité analogue à l'inclinaison du plan d'une section oblique sur le plan de la section normale qui a même trace sur le plan tangent.

175. Nous désignerons, dans ce qui va suivre, par analogie, la valeur de $\frac{d\beta'}{d\beta}$ au point considéré par C. Ce rapport $\frac{d\beta'}{d\beta}$ n'est autre que la caractéristique de celle des droites du faisceau

$$y = (m + n\sqrt{-1})x,$$

qui est parallèle au premier élément de la courbe.

Nous nous bornerons à l'examen du cas où C ne varierait pas le long de la courbe tracée, du moins dans un intervalle infiniment petit. Ce cas nous intéresse plus particulièrement, parce qu'il comprend celui où la courbe considérée serait une conjuguée du lieu total.

Nous supposerons, pour simplifier les calculs, qu'on ait pris l'axe des x parallèle au grand axe du faisceau des éléments du lieu au point $[x, y]$, de façon que l'équation du faisceau des droites parallèles à ces éléments soit réduite à la forme

$$y = n\sqrt{-1}\,x,$$

n étant moindre que 1.

La direction du premier élément de la courbe décrite est celle de la droite représentée dans le système C par l'équation

$$y = n\sqrt{-1}\,x,$$

c'est-à-dire de la droite

$$y = \left(n + \frac{2n^2}{-n-\mathrm{C}}\right)x = \frac{n(\mathrm{C}-n)}{\mathrm{C}+n}\,x;$$

la différentielle de x étant

$$dx = d\alpha + d\beta\sqrt{-1},$$

celle de y est

$$dy = d\alpha' + d\beta'\sqrt{-1} = n\sqrt{-1}\left(d\alpha + d\beta\sqrt{-1}\right) = -\,n\,d\beta + n\,d\alpha\sqrt{-1},$$

de sorte que la condition que

$$\frac{d\beta'}{d\beta} = \mathrm{C}$$

revient à

$$\frac{n\,d\alpha}{d\beta} = \mathrm{C},$$

ou

$$d\beta = \frac{n}{\mathrm{C}}\,d\alpha,$$

et que, par suite, dx prend la forme

$$dx = d\alpha\left(1 + \frac{n}{C}\sqrt{-1}\right).$$

La différentielle de $\frac{dy}{dx}$ s'exprime donc par

$$d\frac{dy}{dx} = (p + q\sqrt{-1})\,dx = (p + q\sqrt{-1})\left(1 + \frac{n}{C}\sqrt{-1}\right)d\alpha$$
$$= \frac{pC - nq}{C}\,d\alpha + \frac{qC - np}{C}\,d\alpha\sqrt{-1}.$$

Le faisceau des droites parallèles aux éléments du lieu au point $[x + dx,\ y + dy]$ est donc

$$y = \left(\frac{pC - nq}{C}\,d\alpha + n\sqrt{-1} + \frac{qC + np}{C}\,d\alpha\sqrt{-1}\right)x,$$

et par suite le second élément de la courbe décrite est, d'après une formule connue [*], parallèle à la droite

$$y = \left[\frac{pC - nq + qC + np}{C}\,d\alpha + n + \frac{2\left(n + \frac{qC + np}{C}\,d\alpha\right)}{\frac{pC - nq - qC - np}{C}\,d\alpha - n - C}\right]x,$$

l'angle de contingence $d\varphi$ est donc

$$d\varphi = \frac{\frac{pC - nq + qC + np}{C}\,d\alpha + 2\,\frac{-2n\frac{qC + np}{C}(n + C) - n^2\frac{pC - nq - qC - np}{C}}{(n + C)^2}\,d\alpha}{1 + \left[\frac{n(C - n)}{C + n}\right]^2},$$

[*] La droite de caractéristique C que représente l'équation

$$y = (m + n\sqrt{-1})\,x,$$

est

$$y = \left(m + n + \frac{2n^2}{m - n - C}\right)x.$$

ou

$$d\varphi = \frac{(pC - nq)(C^2 + 2Cn - n^2) + (qC + np)(C^2 - 2Cn - n^2)}{C[(n + C)^2 + n^2(n - C)^2]} d\alpha,$$

ou

$$d\varphi = \frac{p(C^3 + 3C^2n - 3Cn^2 - n^3) + q(C^3 - 3C^2n - 3Cn^2 + n^3)}{C[(n + C)^2 + n^2(n - C)^2]} d\alpha,$$

ou encore

$$d\varphi = \frac{(p + q)(C^3 - 3Cn^2) + (p - q)(3C^2n - n^3)}{C[(n + C)^2 - n^2(n - C)^2]} d\alpha.$$

D'un autre côté, l'élément de chemin réellement parcouru du point $[x, y]$ au point $[x + dx,\ y + dy]$ est

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{(d\alpha + d\beta)^2 + (d\alpha' + d\beta')^2} \\ &= d\alpha \sqrt{\left(1 + \frac{n}{C}\right)^2 + n^2\left(1 - \frac{n}{C}\right)^2} \\ &= \frac{d\alpha}{C}\sqrt{(n + C)^2 + n^2(n - C)^2}, \end{aligned}$$

de sorte que la courbure cherchée est

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{(p + q)(C^3 - 3Cn^2) + (p - q)(3C^2n - n^3)}{[(n + C)^2 + n^2(n - C)^2]^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{R}.$$

176. On peut, dans cette formule, aux constantes p et q substituer les parties r et r' du rayon de courbure $r + r'\sqrt{-1}$ au point $[x, y]$,

La formule générale de $r + r'\sqrt{-1}$ est

$$r + r'\sqrt{-1} = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

ici elle devient

$$r + r'\sqrt{-1} = \frac{(1 - n^2)^{\frac{3}{2}}}{p + q\sqrt{-1}},$$

et comme n^2 est moindre que 1, on en tire

$$p = \frac{r(1-n^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2+r'^2} \quad \text{et} \quad q = \frac{-r'(1-n^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2+r'^2}.$$

Il en résulte pour le rayon de courbure R la nouvelle valeur

$$R = \left[\frac{(n+C)^2+n^2(n-C)^2}{1-n^2}\right]^{\frac{3}{2}} \frac{r^2+r'^2}{(r-r')(C^3-3Cn^2)+(r+r')(3C^2n-n^3)}.$$

177. On peut aussi introduire dans la formule, au lieu de la variable C, la tangente a de l'angle que la tangente à la courbe tracée, au point $[x, y]$, fait avec le grand axe du faisceau des éléments du lieu en ce point, grand axe qui est actuellement parallèle à l'axe des x. Cette substitution présente plusieurs avantages évidents.

La valeur de a est fournie par la formule

$$a = \frac{d\alpha'+d\beta'}{d\alpha+d\beta} = \frac{-\frac{n^2}{C}+n}{1+\frac{n}{C}} = \frac{-n^2+Cn}{C+n},$$

d'où l'on déduit

$$C = \frac{n(n+a)}{n-a},$$

$$n+C = \frac{2n^2}{n-a} \quad \text{et} \quad n-C = -a\frac{n+C}{n} = -\frac{2an}{n-a}.$$

La substitution donne

$$R = \left(\frac{1+a^2}{1-n^2}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{2n^3(r^2+r'^2)}{a^3r+3na^2r'-3n^2nr-n^3r'}.$$

178. On peut vérifier sur cette formule celle que nous avons donnée, dans le chapitre IX, du rayon de courbure d'une conjuguée au point où elle touche l'une des enveloppes. Cette formule était

$$R = \frac{r^2+r'^2}{r-r'}.$$

Or en un point de l'une des deux enveloppes n est nul puisque $\frac{dy}{dx}$ est réel; d'un autre côté, si la tangente à l'enveloppe a été prise pour axe des x, $\frac{dy}{dx}$ est nul

$$\frac{dy}{dx} = 0;$$

par conséquent

$$\frac{d\alpha' + d\beta'\sqrt{-1}}{d\alpha + d\beta\sqrt{-1}} = 0,$$

ce qui exige que $d\alpha'$ et $d\beta'$ soient nuls, d'où il résulte que C est nul aussi et par suite a, qui du reste doit être préalablement remplacé par n, comme on le verrait aisément dans les formules posées plus haut.

La substitution donne immédiatement

$$R = \frac{r^2 + r'^2}{r - r'}.$$

179. Les valeurs remarquables du rayon de courbure

$$R = \left(\frac{1 + a^2}{1 - n^2}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{2n^3(r^2 + r'^2)}{a^3 r + 3a^2 nr' - 3an^2 r - n^3 r'}$$

sont, pour $a = 0$,

$$R = \frac{2(r^2 + r'^2)}{r'(1 - n^2)^{\frac{3}{2}}},$$

et, pour $a = \infty$,

$$R = \frac{2n^3(r^2 + r'^2)}{r(1 - n^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

La loi de variation des autres valeurs de R dépend essentiellement de la marche de la fonction

$$a^3 r + 3a^2 nr' - 3an^2 r - n^3 r'$$

considérée comme dépendante de a, puisque n, r et r' sont constants en un même point $[x, y]$; il sera donc intéressant d'étudier l'équa-

tion

$$a^3 r + 3a^2 nr' - 3an^2 r - n^3 r' = 0.$$

On peut d'abord la réduire à

$$u^3 + 3ku^2 - 3u - k = 0,$$

en posant $\frac{r'}{r} = k$ et prenant pour variable $\frac{a}{n}$ au lieu de a.

Si l'on fait ensuite disparaître le second terme en posant

$$u = t - k,$$

elle devient

$$t^3 - 3(k^2+1)t + 2k(k^2+1) = 0.$$

La fonction $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$ des coefficients de cette équation est

$$k^2(k^2+1)^2 - (k^2+1)^3 = -(k^2+1)^2.$$

Ainsi les trois racines sont toujours réelles.

Pour obtenir ces trois racines sous leur forme trigonométrique, il faut poser

$$t = 2\sqrt{k^2+1}\,.\,s;$$

l'équation devient alors

$$s^3 - \frac{3}{4}s + \frac{1}{4}\frac{k}{\sqrt{k^2+1}} = 0;$$

de sorte que l'angle à diviser en trois parties égales est celui dont la tangente est k.

L'élimination des intermédiaires donne pour a les trois valeurs

$$a = n\left(2\frac{\sqrt{r^2+r'^2}}{r}\sin\frac{\text{arc tang}\,\frac{r'}{r}}{3} - \frac{r'}{r}\right),$$

$$a = n\left(2\frac{\sqrt{r^2+r'^2}}{r}\sin\frac{2\pi + \text{arc tang}\,\frac{r'}{r}}{3} - \frac{r'}{r}\right),$$

et

$$a = n\left(2\frac{\sqrt{r^2+r'^2}}{r}\sin\frac{4\pi + \text{arc tang}\frac{r'}{r}}{3} - \frac{r'}{r}\right).$$

180. Pour déduire de la formule

$$R = \left(\frac{1+a^2}{1-n^2}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{2n^3(r^2+r'^2)}{a^3r+3a^2nr'-3an^2r-n^3r'}$$

celle du rayon de courbure d'une conjuguée quelconque C en un quelconque de ses points $[x, y]$, les axes étant d'ailleurs quelconques, il n'y aura qu'à substituer à x et à a leurs valeurs qu'il sera facile d'obtenir de la manière suivante.

En premier lieu, $n\sqrt{-1}$ est la racine moindre que 1, en valeur absolue, de l'équation qui donne la tangente de la partie imaginaire $\psi\sqrt{-1}$ de l'angle avec l'axe des x du faisceau des tangentes à la courbe au point $[x, y]$.

Ainsi, si au point $[x, y]$

$$\frac{dy}{dx} = m_1 + n_1\sqrt{-1},$$

on tirera n de l'équation connue

$$n_1 n^2 - (m_1^2 + n_1^2 + 1)n + n_1 = 0,$$

qui donne

$$n = \frac{m_1^2+n_1^2+1 \pm \sqrt{(m_1^2+n_1^2+1)^2 - 4n_1^2}}{2n_1};$$

on prendra donc pour n la valeur

$$n = \frac{m_1^2+n_1^2+1 - \sqrt{(m_1^2+n_1^2+1)^2 - 4n_1^2}}{2n_1},$$

puisque c'est la plus petite.

Quant à a, c'est la tangente de l'angle que la tangente à la conjuguée fait avec le grand axe du faisceau des tangentes à la courbe au point $[x, y]$.

Or la tangente à la conjuguée a pour coefficient angulaire

$$\operatorname{tang}\gamma = m_1 + n_1 + \frac{2n_1^2}{m_1 - n_1 - C};$$

d'un autre côté, la tangente de l'angle φ que le grand axe du faisceau des tangentes à la courbe, au point $[x, y]$, fait avec l'axe des x serait donnée par l'équation

$$m_1 \operatorname{tang}^2\varphi - (m_1^2 + n_1^2 - 1)\operatorname{tang}\varphi - m_1 = 0;$$

mais on ne devrait prendre que celle des racines de cette équation qui conjointement avec n ou $\frac{\operatorname{tang}\psi\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}}$ satisferait à l'une des conditions renfermées dans

$$\frac{\operatorname{tang}\varphi + \operatorname{tang}\psi\sqrt{-1}}{1 - \operatorname{tang}\varphi\operatorname{tang}\psi\sqrt{-1}} = m_1 + n_1\sqrt{-1},$$

par exemple à la condition

$$\operatorname{tang}\varphi = m_1 - n_1\sqrt{-1}\operatorname{tang}\varphi\operatorname{tang}(\psi\sqrt{-1}) = m_1 + nn_1\operatorname{tang}\varphi.$$

Il vaudra donc mieux poser tout de suite

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{m_1}{1 - nn_1}.$$

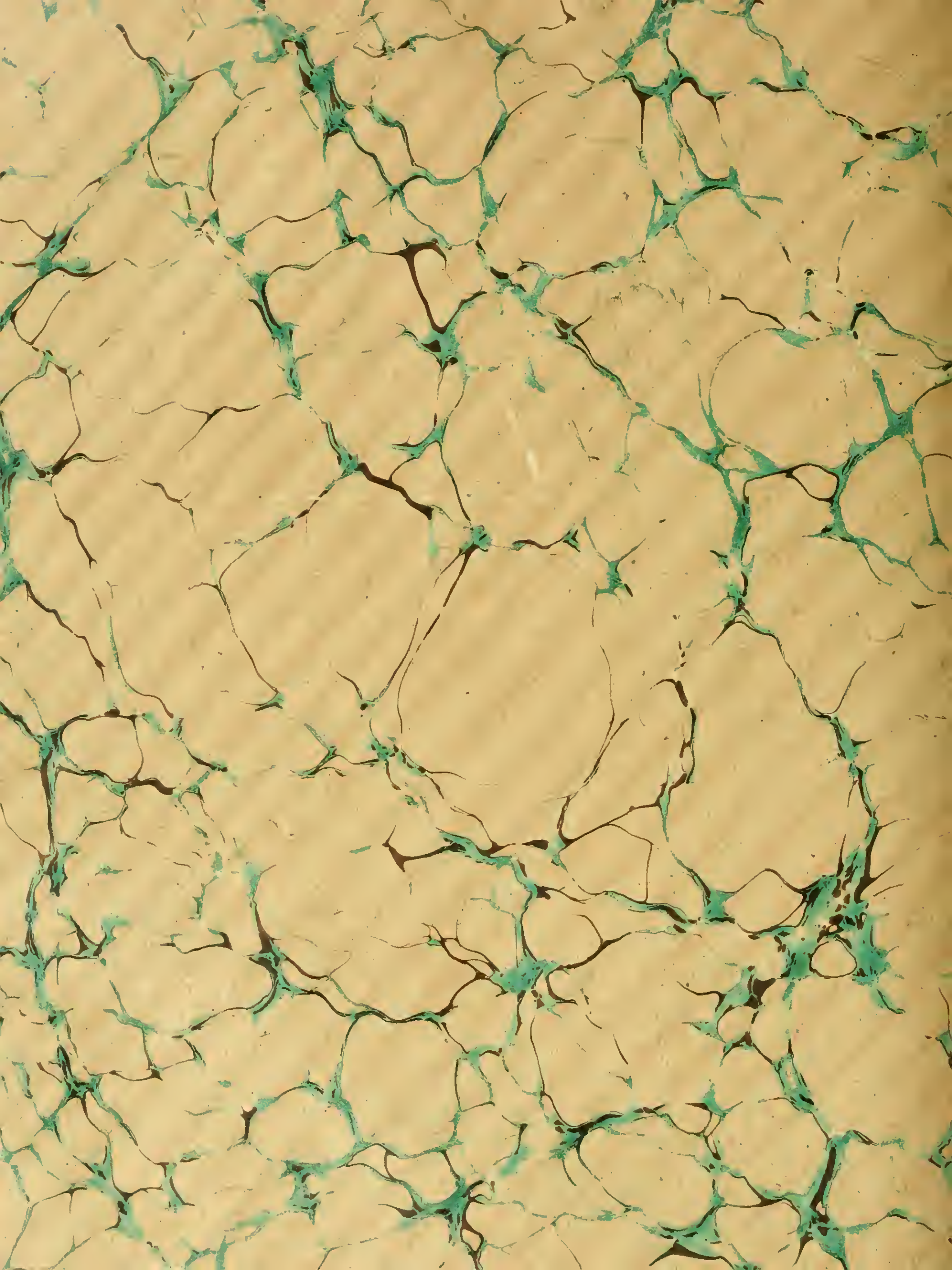
Les angles γ et φ étant ainsi connus, la valeur de a s'en déduira par la formule

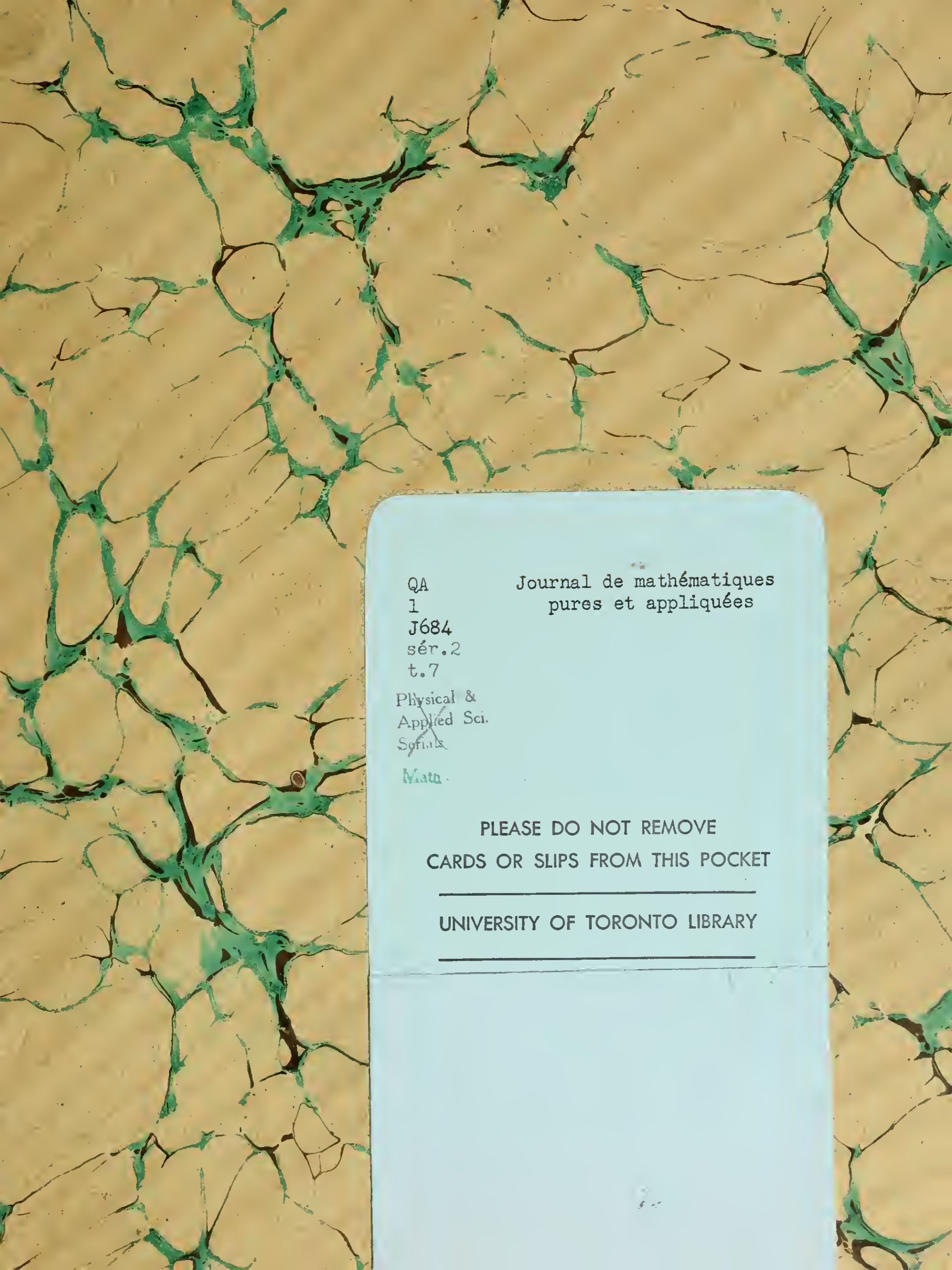
$$a = \operatorname{tang}(\gamma - \varphi).$$

181. *De la courbure des surfaces imaginaires.* — Toute section plane d'une des conjuguées d'une surface n'étant autre chose qu'une des conjuguées de la section, par le même plan, de la surface réelle, les théories qui précèdent pourraient aisément être étendues des courbes aux surfaces.

FIN DU TOME SEPTIÈME (2e SÉRIE).

PARIS. — IMPRIMERIE DE MALLET-BACHELIER,
rue de Seine-Saint-Germain, 10, près l'Institut.




QA
1
J684
sér.2
t.7
Physical &
Applied Sci.
Serials
Math.
Journal de mathématiques
pures et appliquées
PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET
UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY

